

Prova – 2ª fase de 2008
 Nível 3

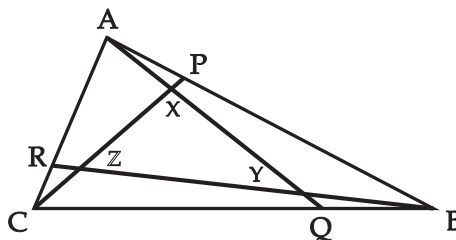
1. Mostre que se um número é múltiplo de 3, então a soma dos cubos de seus algarismos também é múltiplo de 3. Encontre um número de 3 algarismos que é igual à soma dos cubos de seus algarismos.
2. Determine uma função f não identicamente nula (isto é, uma função que não é igual a zero para todo x em seu domínio), cujo domínio é o conjunto dos números reais positivos, satisfazendo, para todo $x > 0$, as relações:

$$x \cdot f(x) - \frac{1}{x} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x^2) \quad e$$

$$f(x^2) - [f(x)]^2 = \frac{2}{x} \cdot f(x)$$

3. Em um certo relógio de ponteiros, o ponteiro dos minutos mede o dobro do ponteiro das horas. Pergunta-se:
 - (a) A partir de meia-noite, qual o primeiro horário no qual os ponteiros estão em posição de formarem dois lados de um triângulo retângulo (não necessariamente os catetos)?
 - (b) Entre meia noite e meio-dia quantas vezes os ponteiros formarão dois lados de um triângulo retângulo?
4. (a) Mostre que a diferença entre duas potências naturais quaisquer de 10 é um múltiplo de 9.
 (b) Mostre que a diferença entre um número natural N e um número M , obtido de N pela permutação de seus algarismos, é um múltiplo de 9.
 Por exemplo, $5247 - 2754 = 2493 = 277 \cdot 9$.

5. Na figura abaixo tem-se $\frac{BQ}{BC} = \frac{AP}{AB} = \frac{CR}{CA} = \frac{1}{n}$, para um triângulo $\triangle ABC$ qualquer.



- (a) Calcule a razão entre as áreas dos triângulos $\triangle XYZ$ e $\triangle ABC$ em função de n .
- (b) Calcule o menor n tal que esta razão seja maior do que $\left(1 - \frac{1}{2008}\right)$.