**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**
**XI OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA**
**PET – MATEMÁTICA**

---

**Gabarito da Prova – 2ª fase de 2008**
**Nível 3**

---

1. Seja $N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1 a_0$ em que $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots a_1, a_0$ são algarismos. Observe que $(a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 + a_0)^3$ é um número que é uma soma cujas parcelas são produtos de três fatores que são combinações dos algarismos $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0$.

   Há três tipos de produtos:

   a) os do tipo $a_k.a_k.a_k = a_k{}^3$, $\;k = n, n-1, n-2, \cdots, 1, 0$ (os três fatores iguais),
   b) os do tipo $a_k.a_k.a_j, k \neq j$, $\;k, j = n, n-1, n-2, \cdots, 1, 0$ (dois fatores distintos),
   c) os do tipo $a_k.a_j.a_l, k \neq j, k \neq l, j \neq l$, $\;k, j, l = n, n-1, n-2, \cdots, 1, 0$ (os três fatores distintos).

   Para cada $k$ há apenas um produto do tipo (a); há 3 produtos para cada par k,j do tipo (b); e há 6 produtos do tipo (c), resultante das permutações de k,j,l.

   Portanto,
   $$(a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 + a_0)^3 =$$
   $$a_n{}^3 + a_{n-1}{}^3 + a_{n-2}{}^3 + \cdots + a_1{}^3 + a_0{}^3 + 3 \quad \text{(produto dos tipos (a) e (b))}.$$

   Assim, se N é múltiplo de 3, $(a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 + a_0)^3$ também é múltiplo de 3. Segue de que $a_n{}^3 + a_{n-1}{}^3 + a_{n-2}{}^3 + \cdots + a_1{}^3 + a_0{}^3$ é múltiplo de 3.

   O número 370 possui 3 algarismos cuja soma dos cubos de seus algarismos é igual a 370, pois $3^3 + 7^3 + 0^3 = 27 + 343 + 0 = 370$.

2. Da 1ª equação, substituindo $x$ por $\frac{1}{x}$, obtemos:
   $$\underbrace{\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) - x f(x)}_{-f(x^2)} = f\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad , \quad \text{para todo } x > 0.$$

   Então, de $-f(x^2) = f\left(\frac{1}{x^2}\right)$, substituindo $x^2$ por $x$, já que $x > 0$, obtemos: $-f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, para todo $x > 0$.

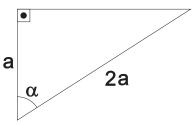
   Agora, somando as duas equações dadas obtemos:
   $$x f(x) - \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) - [f(x)]^2 = \frac{2}{x} f(x).$$

   Multiplicando esta última por $x$ e substituindo $f\left(\frac{1}{x}\right)$ por $-f(x)$ teremos:
   $$x^2 f(x) + f(x) - x[f(x)]^2 = 2f(x) \quad , \quad \text{ou}$$
   $$f(x)[x^2 - 1 - x f(x)] = 0.$$

   Daí, ou $f(x) = 0$, para todo $x > 0$ nos dá uma resposta, que não interessa, ou:
   $$x^2 - 1 - x f(x) \Rightarrow f(x) = x - \frac{1}{x} \quad ,$$
   para todo $x > 0$ que é uma função que procuramos.

   **Resposta:**
   Portanto, $f(x) = x - \frac{1}{x}$ é uma função que satisfaz as condições do enunciado.

3. Se o ponteiro dos minutos é o dobro do comprimento do ponteiro das horas, então tais ponteiros formarão um triângulo retângulo ou com os dois ponteiros como catetos, ou o ponteiro dos minutos como hipotenusa e o outro como cateto, e nesse caso, os dois formarão um ângulo de $60°$, pois:




$\cos\alpha = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$, e isso implica que $\alpha = 60°$.

(a) A partir da meia-noite, os dois ponteiros formarão o primeiro triângulo retângulo quando o ângulo entre eles for $60°$ (que é menor do que $90°$).

A velocidade de rotação do ponteiro dos minutos $V_M$ é 12 vezes a velocidade do ponteiro das horas $V_H$

(enquanto o ponteiro dos minutos percorre $360°$, o ponteiro das horas percorre $\dfrac{360°}{12} = 30°$). Em um tempo t, o ponteiro dos minutos percorre $V_M t$ graus $= 12V_H t$ graus, e o ponteiro das horas percorre $V_H t$ graus. Então $V_M t = 12V_H t$, e:

$$60° = 12V_H t - V_H t = 11V_H t, \text{ ou } t = \frac{60°}{11V_H} \text{ horas.}$$

Como $V_H = 30°/hora$, teremos $t = \dfrac{60°}{11 \times 30}$ horas, ou $t = \dfrac{2}{11}$ horas, ou $t = \dfrac{2 \times 60}{11}$ minutos.

Logo, t é aproximadamente $10,90$ minutos.

**Resposta:**
Portanto, o primeiro horário que ocorrerá o triângulo retângulo com os ponteiros de um relógio será aproximadamente às 00h10, 9min ou 00h10min45seg.

(b) Há duas maneiras de formar um triângulo retângulo:

($i$) com os ponteiros como catetos;
($ii$) com o ponteiro das horas como cateto e o dos minutos como hipotenusa.

No caso ($i$) isso ocorrerá nas "horas cheias", 3 e 9 horas. E, entre as horas 0 e 1, 1 e 2, 4 e 5, 5 e 6, 6 e 7, 7 e 8, 10 e 11, 11 e 12, ocorrerá duas vezes. Entre as horas 2 e 3, 3 e 4, 8 e 9, e 9 e 10, ocorrerá uma vez. Portanto o caso ($i$) ocorrerá: $8 + 2 + 4 + 2 = 22$ vezes.

No caso ($ii$) isso ocorrerá nas "horas cheias", 2 e 10 horas. E, entre as horas 0 e 1, 3 e 4, 4 e 5, 5 e 6, 6 e 7, 7 e 8, 8 e 9, 11 e 12, ocorrerá duas vezes. Entre as horas 1 e 2, 2 e 3, 9 e 10, e 10 e 11, ocorrerá uma vez. Portanto o caso ($ii$) ocorrerá 22 vezes.

**Resposta:**
No total, teremos, entre meia-noite e meio-dia, 44 ocorrências de triângulos retângulos.

4. (a) Sejam $10^m$ e $10^n$, com $m, n \in \mathbb{N}$, duas potências de 10. Vejamos:

$$10^n = 1000...000 \; (n \text{ zeros})$$
$$10^m = 1000...000 \; (m \text{ zeros})$$

Então, se $n > m$ temos:

$10^n - 10^m = (100..000...000) - (100...000) = 99...990...000$ ($m$ zeros e $(n-m)$ noves).

Assim: $10^n - 10^m = 99...999$ ($(n-m)$ noves)$\times 10^m$, que é múltiplo de 9.

Note que:

Se $n > m$, $10^n - 10^m$ é múltiplo de 9.

Se $m > n$, $10^m - 10^n = -(10^n - 10^m)$, que é o oposto de um número múltiplo de 9, portanto é múltiplo de 9.

Ou ainda, se $m = n$, $10^n - 10^m = 0$, que é múltiplo de 9.

(b) Seja um número natural $N$ que possui um número $n$ de algarismos. Por exemplo, os algarismos $a, b, c, d, ..., n$. Note que esse número pode ser escrito como:

(N)
$$a + 10b + 100c + ... + 10^x n, x \in \mathbb{N}$$

Ao permutarmos esse número podemos obter, por exemplo:

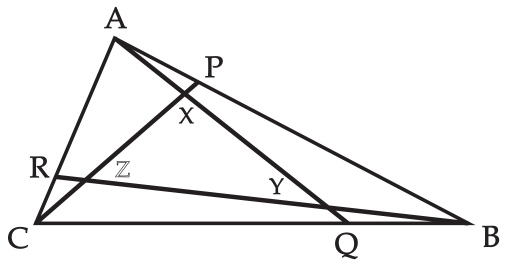
(M)
$$c + 10n + 100b + ... + 10^x a, x \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $(N) - (M)$, obtemos:

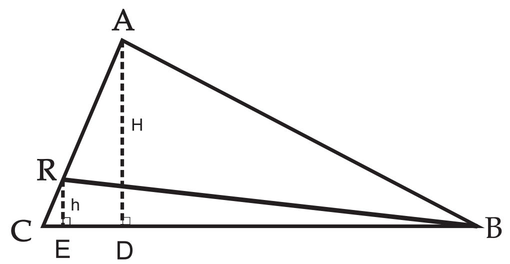
$$a(10^0 - 10^x) + b(10^1 - 10^2) + c(10^2 - 10^0) + ... + n(10^x - 10^1).$$

Como foi provado no **item a**, a diferença entre duas potências naturais quaisquer de 10 é um múltiplo de 9, logicamente ao somarmos múltiplos de 9 (como em $N - M$) obteremos um múltiplo de 9.
E portanto $(N) - (M)$, para $M$ uma permutação qualquer de $N$, é um múltiplo de 9.

5. (a)




Vamos encontrar a área dos triângulos $\triangle BCR$, $\triangle ABQ$ e $\triangle ACP$ em relação ao triângulo $\triangle ABC$.
Sejam $D$ e $E$ no lado $BC$ tais que $AD$ e $RE$ são perpendiculares a $BC$. Como os triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle RCE$ são semelhantes (os três ângulos são iguais) podemos escrever:




$$\frac{CR}{CA} = \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \frac{h}{H} = \frac{1}{n}.$$

Então:

$$A_{\triangle BCR} = \frac{BC \cdot h}{2} = \frac{1}{n}\frac{BC \cdot H}{2} = \frac{1}{n}A_{\triangle ABC}.$$

Da mesma maneira, concluímos que:

$$A_{\triangle ABQ} = \frac{1}{n}A_{\triangle ABC} \quad \text{e} \quad A_{\triangle ACP} = \frac{1}{n}A_{\triangle ABC}.$$

Assim, a área do triângulo $\triangle XYZ$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} A_{\triangle XYZ} &= A_{\triangle ABC} - (A_{\triangle BCR} + A_{\triangle ABQ} + A_{\triangle ACP}) + A_{\triangle BYQ} + \\ &\quad + A_{\triangle CZR} + A_{\triangle AXP}. \end{aligned}$$

Vamos calcular a área dos triângulos que ainda não conhecemos.
Para o triângulo $\triangle BYQ$, consideremos um ponto K tal que $\overline{RK} \setminus \setminus \overline{AQ}$. Aplicando o teorema de Tales temos que:

$$\frac{CK}{CQ} = \frac{CR}{CA} = \frac{1}{n}.$$

Logo, $CK = \frac{1}{n}CQ$. Mas, $CQ = \frac{n-1}{n}BC$. Assim, $CK = \frac{n-1}{n^2}BC$.

Agora,

$$A_{\triangle CKR} = \frac{CK \cdot h}{2} = \frac{\frac{n-1}{n^2}BC \cdot h}{2} = \frac{n-1}{n^2}A_{\triangle BCR} = \frac{n-1}{n^3}A_{\triangle ABC}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} A_{\triangle BKR} &= A_{\triangle BCR} - A_{\triangle CKR} = \left(\frac{1}{n} - \frac{n-1}{n^3}\right)A_{\triangle ABC} \\ &= \frac{n^2-n+1}{n^3}A_{\triangle ABC}. \end{aligned}$$

Como $BK = BC - CK = BC - \frac{n-1}{n^2}BC = \frac{n^2-n+1}{n^2}BC$, teremos

$$\frac{BQ}{BK} = \frac{\frac{1}{n}BC}{\frac{n^2-n+1}{n^2}BC} = \frac{n}{n^2-n+1}.$$

Assim,

$$\frac{A_{\triangle BYQ}}{A_{\triangle BKR}} = \left(\frac{BQ}{BK}\right)^2 = \left(\frac{n}{n^2-n+1}\right)^2,$$

e então,

$$\begin{aligned} A_{\triangle BYQ} &= \left(\frac{n}{n^2-n+1}\right)^2 \frac{n^2-n+1}{n^3}A_{\triangle ABC} \\ &= \frac{1}{n(n^2-n+1)}A_{\triangle ABC}. \end{aligned}$$

Como essa área só depende de $n$ e da área $A_{\triangle ABC}$, concluímos que

$$A_{\triangle CZR} = A_{\triangle AXP} = A_{\triangle BYQ} = \frac{1}{n(n^2-n+1)}A_{\triangle ABC}.$$

Então,

$$A_{\triangle XYZ} = A_{\triangle ABC} - \frac{3}{n}A_{\triangle ABC} + \frac{3}{n(n^2-n+1)}A_{\triangle ABC}.$$

Ou seja,

$$A_{\triangle XYZ} = \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{3}{n(n^2-n+1)}\right)A_{\triangle ABC} = \frac{(n-2)^2}{n^2-n+1}A_{\triangle ABC}.$$

**Resposta:**

Portanto, $\frac{A_{\triangle XYZ}}{A_{\triangle ABC}} = \frac{(n-2)^2}{n^2-n+1}$.

(b) Queremos encontrar o menor $n$ inteiro positivo tal que

$$\frac{(n-2)^2}{n^2-n+1} > 1 - \frac{1}{2008}.$$

Assim,

$$\frac{(n-2)^2}{n^2-n+1} > \frac{2007}{2008} \quad \Leftrightarrow \quad 2008(n-2)^2 > 2007(n^2-n+1)$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 6025n + 6025 > 0.$$

Então,

$$n = \frac{6025 \pm \sqrt{(6025)^2 - 4 \cdot 6025}}{2} = \frac{6025 \pm \sqrt{6025 \cdot 6021}}{2}.$$

Agora, se

$$n_1 = \frac{6025 + \sqrt{6025 \cdot 6021}}{2} \quad \text{e} \quad n_2 = \frac{6025 - \sqrt{6025 \cdot 6021}}{2} \quad ,$$

então, como

$$6021 < \sqrt{6025 \cdot 6021} < 6025 \quad ,$$

teremos

$$6023 = \frac{6025 + 6021}{2} < n_1 < \frac{6025 + 6025}{2} = 6025$$

e

$$n_2 < 6025 - 60212 = 2.$$

Para $n$ tal que $n_2 < n < n_1$, teremos $n^2 - 6025n + 6025 < 0$, e para $n_1 < n$ ou $n < n_2$ teremos $n^2 - 6025n + 6025 < 0$. Como $1 < n$, então o menor valor de $n$ é 6024.

**Resposta:**
Portanto, o menor $n$ que satisfaz o enunciado é $n = 6024$.