UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
XI OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA

Gabarito da Prova – 2ª fase de 2008
Nível 2

1. Sejam a, b e c as quantias de cada uma das pessoas.

   Vamos supor que $a \geq b \geq c \geq 100$ (pois o problema nos diz que cada pessoa possui pelo menos $R\$100,00$).

   Então, de $\dfrac{a}{b} = m$, $\dfrac{b}{c} = n$, onde m e n números inteiros, temos $m \cdot n = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{b}{c} = \dfrac{a}{c}$.

   De $a + b + c = 2008$ temos:

   $$c\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1\right) = 2008 \text{ ou } \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 = \frac{2008}{c} \text{ ou } m \times n + n + 1 = \frac{2008}{c} \text{ e portanto } c \text{ é divisor de 2008.}$$

   Como $2008 = 2^3 \cdot 251$ (251 é primo), temos que os divisores de 2008 são: 1, 2, 4, 8, 251, 502, 1004 e 2008. Como $c \geq 100$, os possíveis valores para c são 215, 502, 1004 ou 2008.

   Se $c = 251$, então $n(m+1) + 1 = \dfrac{2008}{251} = 8$, ou $n(m+1) = 7$, o que nos dá $n = 1$ e $m = 6$ (se $n = 7$ então $m = 0$ e $c = 0$, o que não pode).

   Logo, $n = 1 \Rightarrow \dfrac{b}{251} = 1$ e então $b = 251$ e $m = 6 \Rightarrow \dfrac{a}{251} = 6$ e assim $a = 6 \cdot 251 = 1506$.

   Se $c = 502$, então $n(m+1) + 1 = \dfrac{2008}{502} = 4$, ou $n(m+1) = 3$, o que nos dá $n = 1$ e $m = 2$.

   Então, $n = 1 \Rightarrow \dfrac{b}{502} = 1$ e assim, $b = 502$ e $m = 2 \Rightarrow \dfrac{a}{502} = 2$ o que nos dá $a = 1004$.

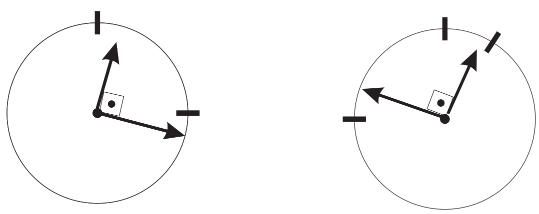
   Se $c = 1004$ ou se $c = 2008$, os valores para a e b seriam menores do que c, o que não é possível.

   Resposta:
   Logo, os possíveis valores para as quantias que as 3 pessoas podem ter são: $R\$251,00$, $R\$251,00$ e $R\$1506,00$, ou $R\$502,00$, $R\$502,00$ e $R\$1004,00$.

2. Há duas maneiras dos ponteiros formarem dois lados de um triângulo retângulo: uma com o ângulo reto no centro do relógio, e a outra com o ponteiro dos minutos como hipotenusa e o das horas como cateto (como, por exemplo, às duas horas).

   Vamos analisar quantas vezes o ângulo reto ocorre da primeira maneira entre a meia noite (00 horas) e o meio dia (12 horas). O ângulo reto, no centro, ocorre nas horas cheias, às 3 horas e às 9 horas (e somente nessas horas).

   Entre 00 hora e 1 hora o ângulo reto no centro ocorrerá duas vezes: uma um pouco depois de 00h 15min, e a outra depois de 00h 45min:

   Entre 1 hora e 2 horas ocorrerá novamente duas vezes.

   Entre 2 horas e 3 horas ocorrerá **uma** vez (não contamos a ocorrência às 3 horas).

   Entre 3 horas e 4 horas ocorrerá **uma** vez.

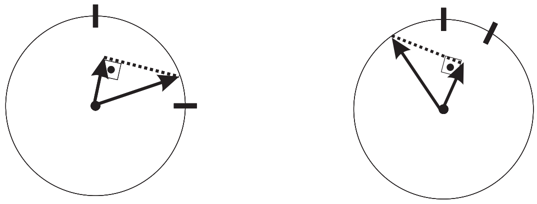
Depois, o ângulo reto ocorrerá novamente duas vezes em cada intervalo de hora, exceto entre 8 horas e 9 horas, e entre 9 horas e 10 horas, quando ocorrerá uma vez em cada intervalo.

Portanto, o ângulo reto no centro ocorrerá **duas** vezes em oito intervalos de horas, **uma** vez em quatro intervalos de horas e às 3 horas e às 9 horas.

Isso nos dá um total de: $(8 \cdot 2) + (4 \cdot 1) + 1 + 1 = 22$ ocorrências.

Vamos analisar agora a ocorrência do ângulo reto quando o ponteiro dos minutos for a hipotenusa do triângulo retângulo.

Entre 00 hora e 1 hora isso ocorrerá **duas** vezes, uma antes de 00h 15min e outra após 00h 45min:



Isso se repetirá em cada intervalo de hora, exceto entre 1 hora e 2 horas, entre 2 horas e 3 horas, entre 9 horas e 10 horas e entre 10 horas e 11 horas. Às 2 horas isso ocorre, conforme dado do problema, e às 10 horas também (horário simétrico às 2 horas em relação ao eixo 6 - 12 do relógio).

Portanto, novamente, haverá 22 ocorrências de triângulo retângulo da segunda maneira.

Resposta:
No total serão **44 ocorrências** de triângulo retângulo entre 00 hora e 12 horas.

3. (a) Os triângulos $\triangle GFE$ e $\triangle AGE$ possuem a base GE em comum e, já que E é ponto médio de CB, possuem alturas iguais a $\frac{1}{2}$.
Então, $A_{\triangle AGE} = A_{\triangle GFE}$. Assim,

$$A_{\triangle AGE} = \frac{A_{\triangle AFE}}{2}.$$

Mas

$$A_{\triangle AFE} = A_{ABCD} - A_{\triangle ADF} - A_{\triangle AEB} - A_{\triangle CEF}$$

e

$$A_{ABCD} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$A_{\triangle ADF} = A_{\triangle AEB} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$A_{\triangle ECF} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}.$$

Logo

$$A_{\triangle AGE} = \frac{A_{\triangle AFE}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{16}.$$

Resposta:
A área do triângulo $\triangle AEG$ é $\frac{3}{16}$.

(b) Sabemos que

$$A_{\triangle AGE} = \frac{EG \cdot \frac{1}{2}}{2}.$$

Mas pelo item anterior, $A_{\triangle AGE} = \frac{3}{16}$. Portanto,

$$\frac{EG \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{16}$$

o que implica em

$$EG = \frac{3}{4}.$$

Resposta:
O comprimento do segmento EG é $\frac{3}{4}$.

4. Sabemos que 2 lanças foram compradas pelo preço de 1 faca e 3 anzóis; e que 3 lanças, 2 facas, 1 anzol valem 25 côcos. Sejam L, F e A os preços, respectivamente, de uma lança, uma faca e um anzol em côcos. Então,

$$\begin{cases} 2L = F + 3A & (1) \\ 3L + 2F + A = 25 & (2) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (1) por 3 e a equação (2) por 2, temos:

$$\begin{cases} 6L = 3F + 9A & (3) \\ 6L + 4F + 2A = 50 & (4) \end{cases}$$

Substituindo (3) em (4) obtemos: $3F + 9A + 4F + 2A = 50 \Rightarrow 7F + 11A = 50$.
Assumindo preços equivalentes inteiros teremos:
Se $A = 1$ Côco, então $7F = 50 - 11 = 39$, que não é múltiplo de 7.
Se $A = 2$ Côcos, então $7F = 50 - 22 = 28$, o que nos dá $F = 4$.
Se $A = 3$, 4,..., não obtemos preços inteiros para F.

Portanto, 1 anzol equivale a 2 côcos, 1 faca equivale a 4 côcos, e substituindo os valores do anzol e da faca na equação (1) obtemos: $2L = 4 + 6 = 10 \Rightarrow L = 5$. Assim, 1 lança equivale a 5 côcos.

Resposta:
Os preços são: 2 côcos para 1 anzol, 4 côcos para 1 faca e 5 côcos para 1 lança.

5. Observe que, no primeiro hexágono, a soma dos números associados aos vértices é *ímpar*, $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21)$. Ao fazermos uma operação de transformação, somamos ou subtraímos o mesmo número em dois vértices consecutivos, sendo assim, estamos somando ou subtraindo um número total *par* ao valor 21, que é ímpar. Como resultado obteremos um novo hexágono, cuja soma dos números associados aos vértices ainda é *ímpar*, independente do valor que utilizemos para fazer as operações. Para que todos os vértices tivessem o mesmo número, ao somarmos esses valores deveríamos encontrar um número par, o que não acontece.

Resposta:
Portanto, não é possível chegar a um hexágono em que todos os vértices tenham o mesmo número.

Local: PET Matemática – Centro de Ciências Físicas e Matemáticas – Universidade Federal de Santa Catarina
Fone/FAX: (48) 3721-6809 orm@pet.mtm.ufsc.br www.orm.mtm.ufsc.br