



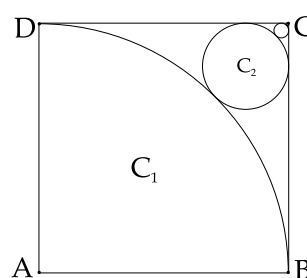
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
X OLIMPIÁDA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA



Prova 2ª fase de 2007
Nível 3

1. Seja uma função f , definida no conjunto dos números racionais positivos. Sabendo que $f(1) = 7$ e $f(x \cdot f(y)) = x \cdot f(f(y))$, calcule $f(2007)$.

2. Em um quadrado $ABCD$, de lado $AB = l$, inscreve-se um quarto de círculo C_1 com centro em A . Na região delimitada pelos lados BC e CD e pela circunferência de C_1 inscreve-se um círculo C_2 . Na região delimitada pelos lados BC , CD e pela circunferência de C_2 inscreve-se um outro círculo C_3 , e assim por diante (veja figura). Calcule a área do círculo C_n assim construído, em função do lado l do quadrado.



3. A seqüência de Farey é uma seqüência de frações entre 0 e 1 construída com as seguintes etapas:

(1) $\frac{0}{1} \quad \frac{1}{1}$

(2) $\frac{0}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1}$

(3) $\frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{1}$

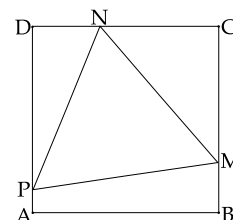
(4) $\frac{0}{1} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{1}$

e assim por diante, sempre tomando duas frações vizinhas $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ e inserindo-se entre elas a fração

$\frac{p+r}{q+s}$. Mostre que em qualquer etapa da construção da seqüência de Farey quaisquer duas frações

vizinhas $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ satisfazem $ps - qr = -1$.

4. O quadrado $ABCD$ tem lado 1 e a distância AP (veja figura) é igual a $\frac{1}{8}$. Calcule o lado do triângulo equilátero PMN inscrito no quadrado. Seria possível outra configuração para os vértices M e N (por exemplo, M em AB e N em CD)? Explique.



5. Mostre que a soma de todos os números de nove algarismos distintos, formados somente com algarismos de 1 a 9 é um múltiplo de 111.111.111.