UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
X OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA

Gabarito da Prova da ORM – 2ª fase de 2007
Nível 2

---

1. Observe que $2007 = 3^2 \cdot 223$. A equação nos diz que:

$$\frac{n-m}{mn} = \frac{1}{2007} = \frac{1}{3^2 \cdot 223}$$

Não é possível obter m e n tais que $mn = 2007$ e $n - m = 1$. Então, o que devemos ter é:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{n-m}{mn} = \frac{k}{2007.k} = \frac{k}{3^2 \cdot 223 \cdot k}$$

Uma possibilidade seria assumirmos $n = 3^2 \cdot 223 \cdot k$ e $m = 3 \cdot 223 \cdot k$. Então teríamos, no numerador da diferença:

$$2 = 3 - 1 = k$$

Assim, $n = 4014$ e $m = 1338$.

Outra possibilidade seria $3^2 \cdot 223 \cdot k$ e $m = 223 \cdot k$. Então:

$$8 = 9 - 1 = k$$

e $n = 16056$, $m = 1784$.
Os números $n = 4014$ e $m = 1338$ são os *menores* números inteiros positivos que satisfazem a equação.

2. a) Os triângulos $\triangle APS$, $\triangle DSR$ e $\triangle CRQ$ são congruentes pois $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{C} = 90^o$ e os lados que formam esses ângulos são congruentes (caso LAL de congruência de triângulos). Então $PS = SR = RQ$. Além disso, $P\widehat{S}A = S\widehat{R}D = R\widehat{Q}C$ e como $A\widehat{P}S = D\widehat{S}R = C\widehat{R}Q$, e $P\widehat{S}A + A\widehat{P}S = S\widehat{R}D + D\widehat{S}R = R\widehat{Q}C + C\widehat{R}Q = 90^o$, temos que $P\widehat{S}A + D\widehat{S}R = S\widehat{R}D + C\widehat{R}Q = 90^o$, e, portanto $P\widehat{S}R = S\widehat{R}Q = 90^o$. Logo, $PSRQ$ é um quadrado. (A rigor teremos que os triângulos retângulos $\triangle PSR$ e $\triangle QSR$ são triângulos retângulos isóceles congruentes. Segue-se daí que $\triangle SQP \equiv \triangle RPQ$, e daí $PQ = PS = SR = RQ$. Além disso, $P\widehat{Q}R = R\widehat{P}S = 90^o$, e portanto $PQRS$ é um quadrado).

b) Se $PS = SR = RQ = QP = \dfrac{5}{9}$. Então:

$$a^2 + b^2 = \frac{25}{81}$$

e, como $a + b = 1$, teremos $1 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Segue-se que $ab = \dfrac{28}{81}$. Daí, a e b satisfazem a equação de 2º grau:

$$x^2 - x + \frac{28}{81} = 0$$

o que não nos fornece valores reais.

3. Como 2007 é ímpar, podemos nos preocupar somente com os termos de ordem ímpar da seqüência. Assim, seja $y_1 = x_1$, $y_2 = x_3$, etc, temos:

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 = 1 \\
y_2 &= x_3 = 3x_1 - 1 = 3y_1 - 1 = 3y_1 - \frac{3-1}{2} = 2 \\
y_3 &= x_5 = 3x_3 - 1 = 3y_2 - 1 = 3(3y_1 - 1) - 1 = 3^2y_1 - 4 = 3^2y_1 - \frac{3^2-1}{2} \\
y_4 &= x_7 = 3x_5 - 1 = 3y_3 - 1 = 3(3^2y_1 - 4) - 1 = 3^3y_1 - 13 = 3^3y_1 - \frac{3^3-1}{2} \\
&\vdots \\
y_{1004} &= x_{2007} = 3x_{2005} - 1 = \cdots = 3^{1003}y_1 - \frac{3^{1003}-1}{2} = \frac{3^{1003}+1}{2}
\end{aligned}$$

4. Fixando o dígito 1 na casa da unidade, teremos seis números:

$$2341, 2431, 3241, 4231, 4321$$

O mesmo ocorrerá se fixarmos cada um dos outros três dígitos nessa casa.
Somando somente os algarismos da casa das unidades obteremos:

$$6 \times 1 + 6 \times 2 + 6 \times 3 + 6 \times 4 = 6(1 + 2 + 3 + 4) = 6 \times 10$$

Para as outras casas ocorrerá o mesmo e, como um número $abcd$ (algarismos a, b, c e d) é dado por (base decimal):

$$10^3a + 10^2b + 10c + d$$

temos que a soma procurada será dada por:

$$10^3 \cdot 6 \times 10 + 10^2 \cdot 6 \times 10 + 10 \cdot 6 \times 10 + 1 \cdot 6 \times 10 = 60(10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 60 \times 1111 = 66660$$

5. Seja ab um número de dois algarismos. Então esse número é dado por $10a + b$ (base decimal). Queremos que:

$$10a + b = k(a + b) \text{ ou } (10 - k)a = b(k - 1)$$

Observe que $k > 1$, e portanto, a equação está na ordem certa.
Assim, $0 < k \geqslant 10$, k inteiro.

Então, como a e b são algarismos, temos:
Se $k = 1$ teremos $9a = 0 \Rightarrow a = 0 \rightarrow$ (não tem dois algarismos)
Se $k = 2$ teremos $8a = b \Rightarrow a = 1$ e $b = 8 \rightarrow 18$
Se $k = 3$ teremos $7a = 2b \Rightarrow a = 2$ e $b = 7 \rightarrow 27$
Se $k = 4$ teremos $6a = 3b \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \; e \; b = 2 \rightarrow 12 \\ a = 2 \; e \; b = 4 \rightarrow 24 \\ a = 3 \; e \; b = 6 \rightarrow 36 \\ a = 4 \; e \; b = 8 \rightarrow 48 \end{cases}$
Se $k = 5$ teremos $5a = 4b \Rightarrow a = 4$ e $b = 5 \rightarrow 45$
Se $k = 6$ teremos $4a = 5b \Rightarrow a = 5$ e $b = 4 \rightarrow 54$
Se $k = 7$ teremos $3a = 6b \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \; e \; b = 1 \rightarrow 21 \\ a = 4 \; e \; b = 2 \rightarrow 42 \\ a = 6 \; e \; b = 3 \rightarrow 63 \\ a = 8 \; e \; b = 4 \rightarrow 84 \end{cases}$
Se $k = 8$ teremos $2a = 7b \Rightarrow a = 7$ e $b = 2 \rightarrow 72$
Se $k = 9$ teremos $a = 8b \Rightarrow a = 8$ e $b = 1 \rightarrow 81$
Se $k = 10$ teremos $b = 0 \Rightarrow a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \rightarrow 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.$

São 23 números.