UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
X OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA

Gabarito da Prova da ORM – 2ª fase de 2007
Nível 1

1. Vovó comprou 35 novelos para fazer uma blusa e um cachecol para cada neto. Cada blusa gasta $7,5$ novelos e cada cachecol gasta $2,5$ novelos. Cada novelo tem 40 gramas e 106 metros. Então 2 blusas gastam $7,5 \times 2 = 15$ novelos. O gato Bonfio estragou 53 metros de lã, que correspondem a $\frac{1}{2}$ novelo, e escondeu 60 gramas de lã, que correspondem a um novelo e meio. Assim, temos dois novelos que não podem ser usados e sobram 3 novelos, ou seja, 120 gramas. Então teremos $35 - 3 = 32$ novelos utilizados nos presentes e $15 + 2 = 17$ novelos perdidos, totalizando $32 - 17 = 15$ novelos. 3 cachecóis correspondem a $7,5$ novelos e 1 blusa corresponde a $7,5$ novelos que somam 15 novelos. Então foram feitos 3 blusas e 3 cachecóis. Logo, Vovó tem 3 netos.

2. A seqüência $1, 2, 3, 4, ..., 500$ tem número par de parcelas. $1 + 500 = 2 + 499 = 3 + 498 = ... = 250 + 251$, há um número par de somas iguais (250 somas); então $(1 + 500) - (2 + 499) + (3 + 498) - ... + (249 + 252) - (250 + 251) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - ... - 250 - 251 + 252 - ... + 498 - 499 + 500 = 0$. Para $1, 2, 3, ..., 500, 501, 502$; tamém há um número par de parcelas, mas teremos um número ímpar de somas: $1 + 502 = 2 + 501 = 3 + 500 = ... = 250 + 253 = 251 + 252$, 251 somas. Assim, não podemos operartodos os números de forma a resultar zero (sobrará uma se fizermos como na primeira parte).

3. A distribuição ficou da seguinte maneira:
1^a pessoa $= 1 + 2 + 1 + 2$ moedas
2^a pessoa $= 2 + 1 + 2 + 1$ moedas
3^a pessoa $= 1 + 2 + 1 + 2$ moedas
4^a pessoa $= 2 + 1 + 2 + 1$ moedas
5^a pessoa $= 1 + 2 + 1 + 2$ moedas
6^a pessoa $= 2 + 1 + 2 + 1$ moedas
7^a pessoa $= 1 + 2 + 1 + 2$ moedas
8^a pessoa $= 2 + 1 + 2 + 1$ moedas
9^a pessoa $= 1 + 2 + 1 + 2$ moedas
10^a pessoa $= 2 + 1 + 2 + 1$ moedas
11^a pessoa $= 1 + 2 + 1 + 2$ moedas
A cada duas rodadas o número de moedas é igual para todos.
2^a rodada $= 3$ moedas por pessoa
4^a rodada $= 6$ moedas por pessoa
6^a rodada $= 9$ moedas por pessoa
E assim por diante.
Então podemos notar que:
Rodada $2 \cdot 1 = 3 \cdot 1$ moedas
Rodada $2 \cdot 2 = 3 \cdot 2$ moedas
Rodada $2 \cdot 3 = 3 \cdot 3$ moedas
E assim sucessivamente. Desta maneira o total (11 pessoas) de moedas será:
Rodada $2 \cdot 1 = 11 \times 3 \cdot 1 = 33$
Rodada $2 \cdot 2 = 11 \times 3 \cdot 2 = 66$
Rodada $2 \cdot 3 = 11 \times 3 \cdot 3 = 99$
Seguindo dessa maneira até a Rodada $2 \cdot 60 = 11 \times 3 \cdot 60 = 1980$.
Após 120 rodadas, cada pessoa recebeu 180 moedas e sobram 27 moedas. Então $2007 = 33 \times 60 + 27$.
Agora vamos distribuir as 27 moedas restantes entre as 11 pessoas:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	*Pessoas*
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	$Rodada 121$
2	1	2	1	2	1	2					$Rodada 122$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
183	183	183	183	183	183	183	182	181	182	181	

Logo, a distribuição terminou na 7^a pessoa. Da 1^a à 7^a, todos receberam 183 moedas. A 8^a e a 10^a receberam 182 moedas e a 9^a e a 11^a receberam 181 moedas.

4. $a \cdot b = 10a + b = 7q_1 + 4$
   $b \cdot a = 10b + a = 7q_2 + 4$
   Os múltiplos de 7 somados com 4, com 2 algarismos:

11	$11 = 7.1 + 4$	*serve*!
18	$81 = 7.11 + 4$	*serve*!
25	$52 = 7.7 + 3$	
32	$23 = 7.3 + 2$	
39	$93 = 7.13 + 2$	
46	$64 = 7.9 + 1$	
53	$35 = 7.5 + 0$	
60		
67	$76 = 7.10 + 6$	
74	$47 = 7.6 + 5$	
81	$18 = 7.2 + 4$	*serve*!
88	$88 = 7.12 + 4$	*serve*!
95	$59 = 7.8 + 3$	

   Os números são 11, 18, 81 e 88.

5. Os quadrados perfeitos com dois algarismos são: $16, 25, 36, 49, 64, 81$. Vamos fazer então as combinações dos números anteriores (dois a dois) e ver quais as somas dos algarismos dos que darão quadrados perfeitos.

16	25	*soma*14	
16	36	*soma*16	*serve*!
16	49	*soma*20	
16	64	*soma*17	
16	81	*soma*16	*serve*!
16	16	*soma*14	

   Os números que obedecem as condições do problemas são: $1636, 3616, 1681 = 41^2, 8116$.

25	25	*soma*14	
25	36	*soma*16	*serve*!
25	49	*soma*20	
25	64	*soma*17	
25	81	*soma*16	*serve*!

   Os números que obedecem as condições do problemas são: $2536, 3625, 2581, 8125$.

36	36	*soma*18
36	49	*soma*22
36	64	*soma*19
36	81	*soma*18

   Não conseguimos formar números de acordo com as condições do problema.

49	49	*soma*26
49	64	*soma*23
49	81	*soma*22

   Também não conseguimos formar números.

64	64	*soma*20
64	81	*soma*19

   Novamente não conseguimos formar números.

81	81	*soma*18

   Também não podemos formar números.
   Então os números *mais-que-perfeito* são: $1636, 3616, 1681(41^2), 8116, 2536, 3625, 2581, 8125$. Assim temos 8 números *mais-que-perfeito*, sendo que um é quadrado perfeito.