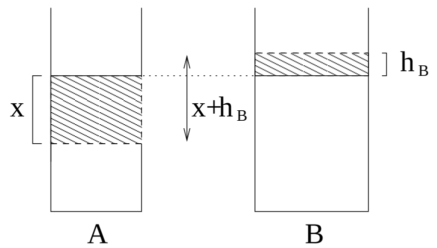
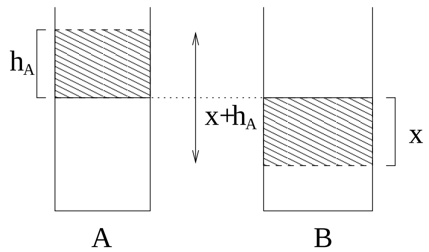
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
VIII OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA

Gabarito da Prova da ORM – 2ª fase de 2006
Nível 3

1.



$$\left\{ \begin{array}{lcl} \pi\tau_A^2 x & = & \pi\tau_B^2 h_B \\ x + h_B & = & 10 \Rightarrow h_B = 10 - x \end{array} \right\} \Rightarrow \tau_A^2 x = \tau_B^2(10 - x) \Rightarrow x(\tau_A^2 + \tau_B^2) = 10\tau_B^2. \quad (1)$$

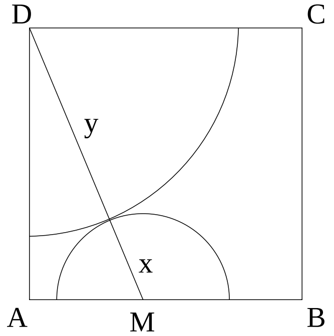


$$\left\{ \begin{array}{lcl} \pi\tau_B^2 x & = & \pi\tau_A^2 h_A \\ x + h_A & = & 40 \Rightarrow h_A = 40 - x \end{array} \right\} \Rightarrow \tau_B^2 x = \tau_A^2(40 - x) \Rightarrow x(\tau_A^2 + \tau_B^2) = 40\tau_A^2. \quad (2)$$

De (1) e (2) (dividindo (2) por (1)):

$$4\left(\frac{\tau_A}{\tau_B}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{\tau_A}{\tau_B} = \frac{1}{2}.$$

2.



Sejam x e y os raios do semi-círculo inferior e do quarto de círculo superior, respectivamente. Então $x + y = DM$.
Mas, $AD^2 + AM^2 = DM^2$, ou

$$40^2 + 20^2 = DM^2, \text{ ou}$$

$$DM^2 = 1600 + 400 = 2000$$

$$DM = \sqrt{2000} = \sqrt{400 \times 5} = 20\sqrt{5}.$$

Assim, $x + y = 20\sqrt{5}$. (1)
Agora, a soma das áreas do semi-círculo e do quarto de círculo é:

$$S = \frac{\pi x^2}{2} + \frac{\pi y^2}{4}. \quad (2)$$

Queremos achar x e y de modo que S seja mínima (pois a área hachurada deve ser máxima). Então, de (1) temos $y = 20\sqrt{5} - x$. Levando em (2) obtemos:

$$S = S(x) = \pi[\frac{x^2}{2} + \frac{(20\sqrt{5}-x)^2}{4}] =$$

$$= \frac{\pi}{2}[x^2 + \frac{2000 + x^2 - 40\sqrt{5}x}{2}] =$$
$$= \frac{\pi}{2}[\frac{3x^2 - 40\sqrt{5}x + 2000}{2}].$$

S será mínima quando o polinômio $p(x) = 5x^2 - 40\sqrt{5}x + 2000$ for mínimo. Isto ocorre no vértice da parábola que pode ser encontrado da seguinte forma:

$$3x^2 - 40\sqrt{5}x + 2000 = 3[x^2 - \frac{40\sqrt{5}}{3}x + \frac{2000}{3}] =$$

$$= 3[(x - \frac{20\sqrt{5}}{3})^2 - \frac{2000}{9} + \frac{2000}{3}] =$$

$$= 3[(x - \frac{20\sqrt{5}}{3}^2 + \frac{4000}{9}] \geq \frac{4000}{2}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $x = \dfrac{20\sqrt{5}}{3}$.

Então $y = 20\sqrt{5} - \dfrac{20\sqrt{5}}{3} = \dfrac{40\sqrt{5}}{3}$.

A resposta é: $x = \dfrac{20\sqrt{5}}{3}m$ e $y = \dfrac{40\sqrt{5}}{3}m$ (Observe que $y = 2x$).

3. Como $m < n$, pelo menos um dos inteiros entre m e n (incluindo m e n) é par. Escrevendo cada número inteiro de m até n na sua decomposição em fatores primos, existirá pelo menos um número cujo expoente de 2 é o maior possível (um número par, é claro). Afirmamos que existe um único número de m até n com expoente máximo da potência de 2 em sua decomposição em fatores primos. Suponhamos que isso não ocorra, ou seja, suponhamos que existam inteiros k e l, com $0 \leqslant k < l$, tais que $m+l \leqslant n$, $m+k = a \times 2^x$, $m+l = b \times 2^x$ e x expoente máximo (inteiro positivo) de 2. Então, como a e b são ímpares e $a < b$, existirá um número par c, $a < c < b$. Seja $c = 2^y \times d$. Mas então $c \times 2^x = d \times 2^{x+y}$ será um número entre m e n com expoente da potência de 2 maior do que o expoente em $m + l$ ou $m + k$, o que é uma contradição.
Seja então $p \times 2^z = m + r$, $m \leqslant p \times 2^z \leqslant n$, o número com maior expoente (z) da potência de 2. Então o mínimo múltiplo comum de $m, m+1, \cdots, n$ será da forma $2^z \times q$, onde q é ímpar.
Então os números da forma $\dfrac{2^z \times q}{m+j}$, $0 \leqslant j \leqslant n - m$, serão pares, exceto o número $\dfrac{2^z \times q}{m+r}$.
Segue-se que:
$\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m+1} + \cdots + \dfrac{1}{n} = \dfrac{\frac{2^z \times q}{m} + \frac{2^z \times q}{m+1} + \cdots + \frac{2^z \times q}{m+r} + \cdots + \frac{2^z \times q}{n}}{2^z \times q}$. Mas então o numerador dessa fração é ímpar e o denominador será par. Logo, a soma não é um número inteiro.

4. Como $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, então:

$$\begin{aligned} P(x+1) &= a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) = \\ &= a(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + b(x^2 + 2x + 1) + c(x+1) = \\ &= ax^3 + (3a+b)x^2 + (3a+2b+c)x + (a+b+c). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}P(x+1)-P(X) &= ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+(a+b+c)-ax^3-bx^2-cx= \\ &= 3ax^2+(3a+2b)x+(a+b+c).\end{aligned}$$

Por outro lado, como $P(x+1)-P(x)=x^2$, então:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 3a & = & 1 & & & & \\ 3a & + & 2b & = & 0 & & \\ a & + & b & + & c & = & 0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a & = & \frac{1}{3} \\ b & = & -\frac{3}{2}a \\ c & = & -(a+b)\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a & = & \frac{1}{3} \\ b & = & -\frac{1}{2} \\ c & = & -(a+b)\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a & = & \frac{1}{3} \\ b & = & -\frac{1}{2} \\ c & = & -(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})=-(\frac{2-3}{6}=\frac{1}{6}.\end{array}\right.$$

Portanto, $P(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x.$

Agora, temos para $m\in\mathbb{N}$, em particular, que $m^2=P(m+1)-P(m)$, de modo que:

$$\begin{aligned} & n^2+(n-1)^2+\cdots+2^2+1^2= \\ = \; & P(n+1)-P(n)+P(n)-P(n-1)+\cdots+P(3)-P(2)+P(2)-P(1)= \\ = \; & P(n+1)-P(1)= \\ = \; & \frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}(n+1)-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}= \\ = \; & \frac{1}{3}(n^3+3n^2+3n+1)-\frac{1}{2}(n^2+2n+1)+\frac{1}{6}(n+1)-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}= \\ = \; & \frac{n^3}{3}+n^2+n-\frac{n^2}{2}-n+\frac{n}{6}= \\ = \; & \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}= \\ = \; & \frac{2n^3+3n^2+n}{6}.\end{aligned}$$

Por exemplo, tome $n=5$:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=1+4+9+16+25=55, \quad \text{e}$$

$$\frac{2\times 5^3+3\times 5^2+5}{6}=\frac{2\times 125+3\times 255}{6}=\frac{250+75+5}{6}=\frac{330}{6}=55, \text{ como esperado.}$$

5. Sejam $S_1, S_2, \cdots, S_n$ as somas dos algarismos do primeiro, do segundo, $\cdots$, do n-ésimo termo da seqüência, respectivamente.
Então:

$$\begin{array}{ccccccc} S_1 & = & S_2 & 1\times(2+6) & = & 8 \\ S_3 & = & S_4 & 2\times 8 & = & 16 \\ S_5 & = & S_6 & 3\times 8 & = & 24 \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

Se n for <u>par</u> então $S_{n-1} = S_n = \frac{n}{2} \times 8$.

Se n for <u>ímpar</u> então $S_n = \frac{n+1}{2} \times 8$.

Assim, se n for par, a soma pedida S será:

$$
\begin{aligned}
S &= S_1 + S_2 + \cdots + S_n && = \\
&= 2 \times [8 + 16 + \cdots + \frac{n}{2} \times 8] && = \\
&= 2 \times 8[1 + 2 + \cdots + \frac{n}{2}] && = \\
&= 16 \times \frac{(1 + \frac{n}{2})\frac{n}{2}}{2} && = \\
&= 4n(1 + \frac{n}{2}) && = \\
&= 2n(n+2).
\end{aligned}
$$

Se n for ímpar, então a soma S será:

$$
\begin{aligned}
S &= S_1 + S_2 + \cdots + S_{n-1} + S_n && = \\
&= 2 \times 8[1 + 2 + \cdots + \frac{n-1}{2}] + \frac{n+1}{2} \times 8 && = \\
&= 16 \times \frac{(1 + \frac{n-1}{2})\frac{n-1}{2}}{2} + 4(n+1) && = \\
&= 4(n-1)(1 + \frac{n-1}{2}) + 4(n+1) && = \\
&= 2(n-1)(n+1) + 4(n+1) && = \\
&= 2(n+1)(3n+1).
\end{aligned}
$$