UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
IX OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA

Gabarito da Prova da ORM – 2ª fase de 2006
Nível 2

---

1. A vasilha V_1 contém $9+12=21$ litros da mistura vinho-água. A proporção vinho/água nesta vasilha é 9:12. Assim, se tomarmos x litros da vasilha V_l teremos $\frac{9}{21}x=\frac{3}{7}x$ litros de vinho e $\frac{12}{21}x=\frac{4}{7}x$ litros de água.

   A vasilha V_2 contém $18+6=24$ litros da mistura vinho-água na proporção 18:6. Assim, se tomarmos y litros da vasilha v_2 teremos $\frac{18}{24}y=\frac{3}{4}y$ litros de vinho e $\frac{6}{24}y=\frac{1}{4}y$ litros de água.

   Queremos formar uma nova mistura, a de volumes x e y das vasilhas V_1 e V_2 respectivamente, com volume 18 litros, ou seja,

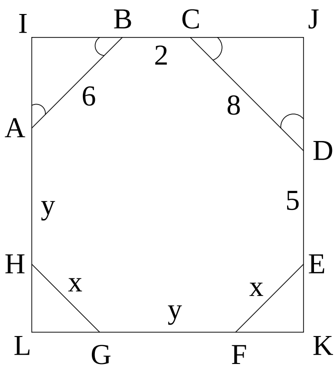
   $$x+y=18. \qquad (1)$$

   Nessa mistura, a proporção vinho e água é 1:1, ou seja,

   $$\frac{3}{7}x+\frac{3}{4}y=\frac{4}{7}x+\frac{1}{4}y \text{ ou } y=\frac{2}{7}x. \quad (2)$$

   De (1) e (2) obtemos: $x+\frac{2}{7}x=18$, ou $\boxed{x=14 \text{ litros}}$.

2. O octógono está inscrito em um retângulo cujos lados opostos contêm os lados de medida 5 e de medida y (oposto ao de medida 5) do octógono, e os lados de medida 2 e y (oposto ao de medida 2) do octógono (veja a figura abaixo):



   Isto porque os ângulos $\angle BAI$, $\angle ABI$, $\angle CDJ$ e $\angle DCJ$ medem 45^o e portanto $\hat{I}=\hat{J}=$ $=90^o$. Então,

   $$IJ=IB+BC+CJ=\frac{6\sqrt{2}}{2}+2+\frac{8\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2+2+4\sqrt{2}}=2+7\sqrt{2}$$

(os lados $\overline{IB}$ e $\overline{CJ}$ são calculados usando-se o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos ΔABI e ΔDCJ).

Além disso, $LK = LG + GF + FK = \dfrac{x\sqrt{2}}{2} + y + \dfrac{x\sqrt{2}}{2} = y + x\sqrt{2}$.

Como $LK = IJ$, temos:

$$y + x\sqrt{2} = 2 + 7\sqrt{2}. \qquad (1)$$

Por outro lado,

$$IL = IA + AH + HL = \frac{6\sqrt{2}}{2} + y + \frac{x\sqrt{2}}{2}, \qquad \text{e}$$

$$JK = JD + DE + EK = \frac{6\sqrt{2}}{2} + y + \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

Como IL = JK, temos:

$$3\sqrt{2} + y + \frac{x\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} + 5 + \frac{x\sqrt{2}}{2}, \quad \text{ou}$$

$$y = 5 + \sqrt{2}. \qquad (2)$$

Substituindo o valor de y em (2) na equação (1) obtemos

$$x\sqrt{2} = 2 + 7\sqrt{2} - y = 2 + 7\sqrt{2} - 5 - \sqrt{2} = -3 + 6\sqrt{2}, \qquad \text{ou}$$

$$2x = -3\sqrt{2} + 12, \quad \text{ou} \quad x = 6 - \frac{3\sqrt{2}}{2}. \qquad (3)$$

Assim, de (2) e (3) temos o perímetro do octógono:

$$2p = 6 + 2 + 8 + 5 + 2x + 2y = 21 + 12 - 3\sqrt{2} + 10 + 2\sqrt{2} = 43 - \sqrt{2}.$$

3. A soma dos algarismos do primeiro número (26) da seqüência é:

$$2 \times 1 + 6 \times 1 = 8.$$

A mesma soma ocorre no segundo número (2006).
A soma dos algarismos do terceiro e quarto número é:

$$2 \times 2 + 6 \times 2 = 16 = 8 \times 2.$$

De uma maneira geral, a soma dos algarismos dos números de ordem $2k - 1$ e $2k$ (ímpar e par consecutivos) é

$$2 \times k + 6 \times k = 8k.$$

Assim, no 2006º número, a soma será:

$$8 \times \frac{2006}{2} = 8 \times 1003 = 8024.$$

4. Se $\underline{n = 20}$ a equação é: $3a + 11b = 20$, que tem uma solução $\underline{a = 3}$ e $\underline{b = 1}$.
Se $\underline{n = 21}$ a equação é: $3a + 11b = 21$, com solução $\underline{a = 7}$ e $\underline{b = 0}$.
Se $\underline{n = 22}$ a equação é: $3a + 11b = 22$, com solução $\underline{a = 0}$ e $\underline{b = 2}$.

   Usaremos agora o seguinte resultado: se a, b e c são três números inteiros consecutivos, então um deles é múltiplo de 3. Se isto não fosse verdadeiro a diferença entre o menor múltiplo de 3 maior do que $c = a + 2$ e o maior múltiplo de 3 menor do que a (portanto entre dois <u>múltiplos consecutivos</u> de 3) seria maior do que 3, o que é absurdo.

   Então, se $n > 22$, $n - 22$, $n - 21$ e $n - 20$ são três inteiros consecutivos positivos. Portanto, um deles será múltiplo de 3, ou da forma $3k$. Assim, se $n > 22$, n será da forma $n = 20 + 3k$, ou $n = 21 + 3k$ ou $n = 22 + 3k$.
Se $n = 20 + 3k$, $a = 3 + k$ e $b = 1$ serão soluções maiores ou iguais a zero da equação.
Se $n = 21 + 3k$, $a = 7 + k$ e $b = 0$ são soluções.
Se $n = 22 + 3k$, $a = k$ e $b = 2$ são soluções.

5. Observemos inicialmente que um número de cinco algarismos só poderá ser quadrado de um número de três algarismos, pois $(99)^2 = (100 - 1)^2 = 10000 - 200 + 1 - 9801$, que não tem cinco algarismos, e $(1000)^2 = 1000000$ tem mais de cinco algarismos.
Consideremos então o quadrado de um números palíndromo de três algarismos aba , onde a e b são algarismos e $a \neq 0$.
Então:

$$n = aba^2 = (100a + 10b + a)^2 = 10000a^2 + 100b^2 + a^2 + 2000ab + 200a^2 + 20ab =$$
$$= 10201a^2 + 100b^2 + 2020ab.$$

   Observe agora que a só poderá ser 1,2 ou 3, pois $(400)^2 = 160000$ já tem seis algarismos.
Então:
<u>Se $a = 1$</u>: $n = 10201 + 100b^2 + 2020b$

$$\underline{b = 0} \Rightarrow \underline{n = 10201 = (101)^2}$$
$$\underline{b = 1} \Rightarrow n = 10201 + 100 + 2020 = \underline{12321 = (111)^2}$$
$$\underline{b = 2} \Rightarrow n = 10201 + 400 + 4040 = \underline{14641 = (121)^2}$$
$$\underline{b = 3} \Rightarrow n = 10201 + 900 + 6060 = 17161 \quad \text{(não é palíndromo)}$$
$$\underline{b = 4} \Rightarrow n = 10201 + 1600 + 8080 = 19881 \quad \text{(não é palíndromo).}$$

   Se $b \geq 5$ então n terá 1 na casa da unidade e um algarismo maior do que 1 na dezena de milhar, e portanto n não será palíndromo.
<u>Se $a = 2$</u>: $n = 40804 + 100b^2 + 4040b$

$$\underline{b = 0} \Rightarrow \underline{n = 40804 = (202)^2}$$
$$\underline{b = 1} \Rightarrow n = 40804 + 100 + 4040 = \underline{44944 = (212)^2}$$
$$\underline{b = 2} \Rightarrow n = 40804 + 400 + 8080 = \underline{49284} \quad \text{(não é palíndromo).}$$

   Se $b \geq 3$ então n terá 4 na casa da unidade e um algarismo maior do que 4 na dezena de milhar.
<u>Se $a = 3$</u>: $n = 91809 + 100b^2 + 6060b$

$$\underline{b = 0} \Rightarrow n = 91809 \quad \text{(não é palíndromo)}$$
$$\underline{b = 1} \Rightarrow n = 91809 + 100 + 6060 = 97969 \quad \text{(não é palíndromo).}$$

Se $b \geq 2$, n terá mais do que cinco algarismos.
Portanto os números são: 10201, 12321, 14641, 40804, 44944.