UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
VIII OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA

Gabarito da Prova da ORM – 2ª fase de 2006
Nível 1

1.

TERMOS	Nº DE TERMOS	SOMA DOS ALGARISMOS
26	1	8
2006	2	8
202606	3	$8+8$
20200606	4	$8+8$
2020260606	5	$8+8+8$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

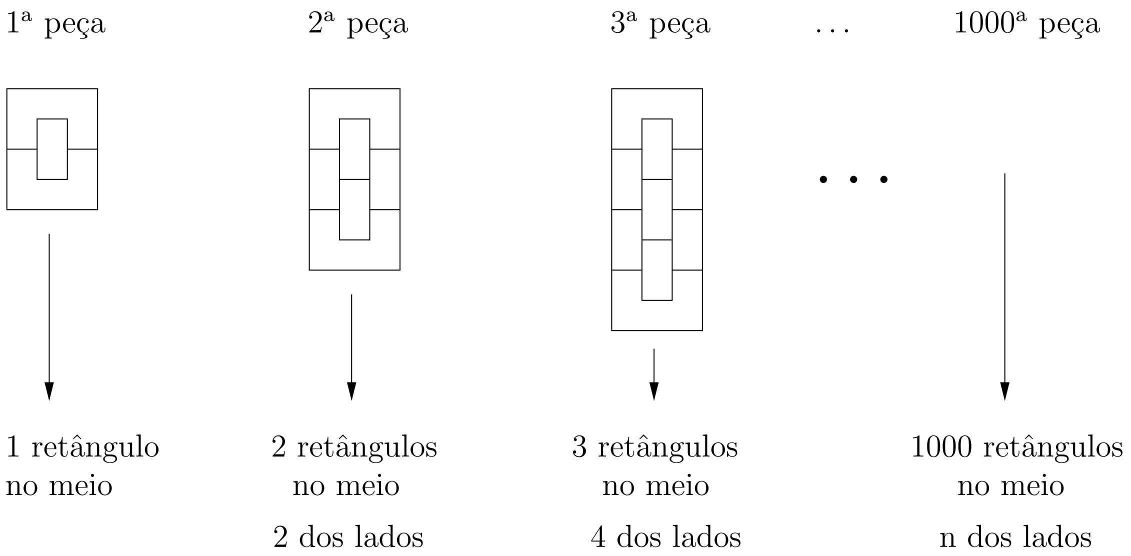
Os termos de ordem par têm a mesma soma de algarismos dos termos de ordem ímpar que o precede.
Termo 2: 1×8 , $2 = 1 \times 2$
Termo 4: 2×8 , $4 = 2 \times 2$
Termo 6: 3×8 , $6 = 3 \times 2$

$\vdots$

Termo 2006: 1003×8, $2006 = 2 \times 1003$.

Logo, a soma de todos os algarismos do 2006º número da seqüência é $1003 \times 8 = 8024$.

2. ***Solução 1:*** Observe a figura abaixo:



$1+0$; $\quad 2+2$; $\quad 3+4 \quad \cdots \quad 1000+n$

1ª - $1+0 = 1+2\times 0$
2ª - $2+2 = 2+2\times 1$
3ª - $3+4 = 3+2\times 2$
4ª - $4+6 = 4+2\times 3$

$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

1000^{a} - $1000 + n = 1000 + 2 \times 999 = 2998.$

Solução 2:
A primeira peça tem 2 blocos em $\boldsymbol{U}$ mais um retângulo.
Total: $3 = 3 \times 1$ blocos.
A segunda peça tem 2 blocos em $\boldsymbol{U}$ mais 4 retângulos.
Total: $6 = 3 \times 2$ blocos.
A terceira peça tem 2 blocos em $\boldsymbol{U}$ mais 7 retângulos.
Total: $9 = 3 \times 3$ blocos.

A peça k terá 3k blocos, dos quais 2 são em $\boldsymbol{U}$.
A 1000^{a} peça terá $3 \times 1000 = 3000$ blocos, dos quais 2 são em $\boldsymbol{U}$. Portanto, $3000 - 2 = 2998$ blocos são retangulares.

3. a b c b a
Pares: a é 2, 4, 6 ou 8.
Divisíveis por 3: $2a + 2b + c$ é múltiplo de 3.
$2a + 2b + c$ é um palíndromo.

Número máximo da soma dos algarismos: $9 \times 5 = 45$.
A soma dos algarismos é um palíndromo de 2 algarismos: 11, 22, 33 ou 44.
Como a soma deve ser múltiplo de 3, deverá ser o 33:

$$2a + 2b + c = 33.$$

$a = 2;\ \ 2 - - - 2 \qquad\qquad 33 - 16 = 29 > 27 = 3 \times 9.$ Não serve!

a = 8; 8 - - - 8	Palíndromos
$33 - 16 = 17 = 2 \times 8 + 1$	88188
$2 \times 7 + 3$	87378
$2 \times 6 + 5$	86568
$2 \times 5 + 7$	85758
$2 \times 4 + 9$	84948
a = 6; 6 - - - 6	Palíndromos
$33 - 12 = 21 = 2 \times 9 + 3$	69396
$2 \times 8 + 5$	68586
$2 \times 7 + 7$	67776
$2 \times 6 + 9$	66966
a = 4; 4 - - - 4	Palíndromos
$33 - 8 = 25 = 2 \times 9 + 7$	49794
$2 \times 8 + 9$	48984

Se a soma dos algarismos for um número de <u>um</u> algarismo (que é palíndromo!), então tal soma deverá ser 3, 6 ou 9 (para que o número seja divosível por 3).
Mas a soma dos algarismos deve ser maior ou igual 4 (pois $\boldsymbol{a}$ é, no mínimo, igual a 2).
<u>Então a soma deverá ser 6 ou 9.</u>

Se a soma for 6 então $\boldsymbol{a}$ só poderá ser 2:

2 - - - 2	Palíndromos
$6 - 4 = 2 = 2 \times 0 + 2$	20202
$2 \times 1 + 0$	21012

Se a soma for 9, então $\boldsymbol{a}$ poderá ser 2 ou 4:

a = 2; 2 - - - 2	Palíndromos
$9 - 4 = 5 = 2 \times 0 + 5$	20502
$2 \times 1 + 3$	21312
$2 \times 2 + 1$	22122
a = 4; 4 - - - 4	Palíndromo
$9 - 8 = 1 = 2 \times 0 + 1$	40104

4.

Gatos	2ª feira	3ª feira	4ª feira	5ª feira	6ª feira	Sábado	Domingo
Chatun	x		x		x		x
Chadê		x		x			x
Chatuá	x				x		x

Chatun: 2ª feira, 4ª feira, 6ª feira : P (preto).

3ª feira, 5ª feira, Sábado, Domingo : B (branco).

Chadê: 3ª feira, 5ª feira, Sábado : P.

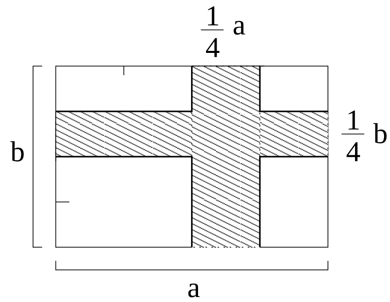
2ª feira, 4ªfeira, 6ª feira, Domingo : B.

Chatuá: 2ª feira, 6ª feira, Sábado : P.

3ª feira, 4ªfeira, 5ª feira, Domingo : B.

É domingo.

5.



1ª solução:

Área do retângulo: $a \times b$.

Área da cruz:

$$\frac{1}{4}ab + \frac{1}{4}ba - \frac{1}{4}a \times \frac{1}{4}b =$$

$$= \frac{1}{2}ab - \frac{1}{16}ab = \frac{8}{16}ab - \frac{1}{16}ab = \frac{7}{16}ab.$$

$$\frac{\text{Área da Cruz}}{\text{Área do Retângulo}} = \frac{\frac{7}{16}ab}{ab} = \frac{7}{16}.$$

ou 2ª ***Solução:***

No retângulo há 16 retângulos menores de lados $\frac{1}{4}a$ e $\frac{1}{4}b$. Destes, 9 não fazem parte da cruz (parte braca) e 7 fazem parte da cruz. Portanto, a razão é $\frac{7}{16}$.