Gabarito da Prova da ORM – 2ª fase de 2005
Nível 2

1. A letra P representará um número par e a letra I um número ímpar.

Vamos construir sequências observando inicialmente a condição (i), e depois as condições (i) e (ii).

A sequência começa com um númereo par (P) ou com um número ímpar (I).

(1) Começando com PAR, temos dois casos:

(a) O segundo termo é par. Então obtemos a sequência abaixo obedecendo a condição (i): PPPP (4 termos)

Observe que a sequência não pode prosseguir sem ferir a condição (i) ou (ii).

(b) O segundo termo é ímpar. Neste caso temos: PIIPI (5 termos)

E a sequência pára aí.

(2) Começando por ÍMPAR:

(a) Segundo termo ímpar: IIPI (4 termos).

(b) Segundo termo par: IPIIPI (6 termos).

Logo, o número máximo de termos que a sequência pode ter é 6.

2.

3. Na primeira tranferência, metade da quantidade inicial de água do vaso A vai para o vaso B e metade fica no vaso A. Após a segunda tranferência (feita pela segunda pessoa), metade da metade que ficou no vaso A (ou seja, um quarto) vai para o vaso C e um quarto fica no vaso A.
Chamemos essas duas tranferências de uma operação de tranferência. Assim, após uma operação de tranferência, o vaso C fica com a metade da quantidade de água que fica no vaso B:

A	B	C
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Como o processo é repetitivo, na segunda operação de tranferência, metade da quantidade de água que estava no vaso A vai para o B, e um quarto da outra quantidade vai para C:

A	B	C
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$

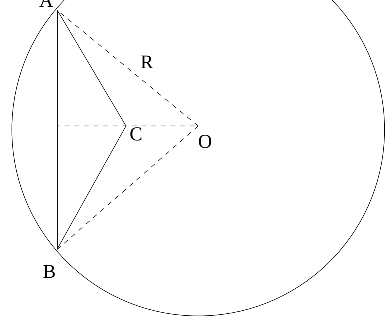
Assim, novamente, a quantidade de água no vaso C é a metade da quantidade de água no vaso B.

Prosseguindo indefinidamente, até a água do vaso A se esgotar, teremos que a quantidade de água no vaso B será o dobro da quantidade no vaso C, ou seja, B conterá $\frac{2}{3}$ do total de água e C conterá $\frac{1}{3}$ do total.

4. Sejam O o centro da circunferência e C o vértice do ângulo reto.

A área do segmento circular (região compreendida entre o arco $\widehat{AB}$ e a corda $\overline{AB}$) é fixa. Então, para maximizar o recorte, devemos maximizar a área do triângulo retângulo $\triangle ABC$ de hipotenusa fixada $\overline{AB}$ (corda correspondente a um ângulo central de 60^o, ou seja, $AB = R$).

Mas o triângulo retângulo, com hipotenusa fixada, de área máxima é o triângulo isósceles (o ponto C percorre uma semicircunferência, e a altura h em relação à hipotenusa será máxima quando $h = \frac{AB}{2}$). A figura correspondente está abaixo.



A área do segmento circular é igual à área do setor circular de arco $\widehat{AB}$ menos a área do triângulo $\triangle AOB$. O triângulo $\triangle AOB$ é equilátero.

$$A_{\triangle AOB} = \tfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$$
$$A_{setor} = \tfrac{1}{6}\pi R^2$$
$$A_{segmento} = A_{setor} - A_{\triangle AOB} = \tfrac{\pi R^2}{6} - \tfrac{R^2\sqrt{3}}{4} = R^2\left(\tfrac{\pi}{6} - \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Por outro lado,

$$A_{\triangle ABC} = \tfrac{AB.h}{2} = \tfrac{R.\frac{R}{2}}{2} = \tfrac{R^2}{4}.$$

Então a área máxima é

$$A = A_{segmento} + A_{\triangle ABC} = R^2\left(\tfrac{\pi}{6} - \tfrac{\sqrt{3}-1}{4}\right).$$

5. Supondo que f atinge um mínimo k (o enunciado já sugere que atinge), queremos então achar tal k de modo que

$$x + \frac{1}{x} \geq k, \text{ para todo } x > 0.$$

Note que $k > 0$.

Como $x > 0$, a inequação nos dá:

$$x^2 - kx + 1 \geq 0, \text{ onde a igualdade deve ser atingida.}$$

Mas então o polinômio quadrático $x^2 - kx + 1$ deve ter uma raiz dupla, ou seja,

$$\triangle = k^2 - 4 = 0$$

Segue-se que $k = \pm 2$. Como $k > 0$, temos $k = 2$.