Gabarito da Prova da ORM – 2ª fase de 2005
Nível 2

1. Na primeira tranferência, metade da quantidade inicial de água do vaso A vai para o vaso B e metade fica no vaso A. Após a segunda tranferência (feita pela segunda pessoa), metade da metade que ficou no vaso A (ou seja, um quarto) vai para o vaso C e um quarto fica no vaso A.
Chamemos essas duas tranferências de uma operação de tranferência. Assim, após uma operação de tranferência, o vaso C fica com a metade da quantidade de água que fica no vaso B:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}$$

Como o processo é repetitivo, na segunda operação de tranferência, metade da quantidade de água que estava no vaso A vai para o B, e um quarto da outra quantidade vai para C:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{2}+\frac{1}{8} & \frac{1}{4}+\frac{1}{16} \end{array}$$

Assim, novamente, a quantidade de água no vaso C é a metade da quantidade de água no vaso B.

Prosseguindo indefinidamente, até a água do vaso A se esgotar, teremos que a quantidade de água no vaso B será o dobro da quantidade no vaso C, ou seja, B conterá $\frac{2}{3}$ do total de água e C conterá $\frac{1}{3}$ do total.

2. É IGUAL A QUESTÃO 2 DO NÍVEL 1.
Sejam a, b, c e d os quatro números primos tais que

$$a + b = 76 \text{ e}$$

$$c + d = 84.$$

Efetuando as diferenças:

$$107 - 76 = 31$$

$$107 - 84 = 23$$

$$149 - 76 = 73$$

$$149 - 84 = 65,$$

Notamos que, na última, obtemos um número não primo (65). Isto significa que c e d não são ambos da soma de valor 149. Mas então a e b necessariamente serão parcelas daquela soma. Portanto o número primo 73 é uma das parcelas da soma 84. Seja $c = 73$. Então $d = 84 - 73 = 11$. Falta encontrar a e b. Observando a primeira difereça acima notamos que 31 não é c nem d. Isto significa que a e b não são ambos parcelas da soma de valor 107. Mas então c e d necessariamente são parcelas daquela soma. Ora, da segunda diferença obtemos 23 que faz parte da soma 76. Seja $a = 23$. Então $b = 76 - 23 = 53$. Os números são:

$$a = 23,\ b = 53$$

$$c = 73,\ d = 11$$

OBS.: $107 = c + d + a = 73 + 11 + 23$ e $149 = a + b + c = 23 + 53 + 73$

3. Um número palíndromo de três algarismos é tal que o algarismo da centena (diferente de zero) é igual ao algarismo da unidade, e o algarismo da dezena pode ser qualquer um de 0 a 9.

Queremos saber quantos são os pares de números palíndromos de três algarismos cujas somas são números palíndromos. Alguns exemplos disto são os pares (202, 737), cuja soma é 939, (555, 444), cuja soma é 999, (303, 808), cuja soma é 111 (aqui um palíndromo de 4 algarismos - note que o enunciado não exige que a soma seja um palíndromo de apenas três algarismos).

Para as somas palíndromas de três algarismos, teremos o seguinte:
Considere os pares distintos possíveis para a casa das centenas:

$$\underbrace{\begin{array}{c}1 \text{ e } 2\\ 1 \text{ e } 3\\ \vdots\\ 1 \text{ e } 8\end{array}}_{7}\quad \underbrace{\begin{array}{c}2 \text{ e } 3\\ 2 \text{ e } 4\\ \vdots\\ 2 \text{ e } 7\end{array}}_{5}\quad \underbrace{\begin{array}{c}3 \text{ e } 4\\ 3 \text{ e } 5\\ 3 \text{ e } 6\end{array}}_{3}\quad \underbrace{\begin{array}{c}4 \text{ e } 5\end{array}}_{1}$$

$7 + 5 + 3 + 1 = 16$

Agora vamos ver os possíveis pares para as casas das dezenas (e aqui podem se repetir, já que as centenas são distintas).

$$\underbrace{\begin{array}{c}0 \text{ e } 0\\ 0 \text{ e } 1\\ \vdots\\ 0 \text{ e } 9\end{array}}_{10}\quad \underbrace{\begin{array}{c}1 \text{ e } 0\\ 1 \text{ e } 1\\ \vdots\\ 1 \text{ e } 8\end{array}}_{9}\quad \underbrace{\begin{array}{c}2 \text{ e } 0\\ 2 \text{ e } 1\\ \vdots\\ 2 \text{ e } 7\end{array}}_{8}\quad \begin{array}{c}\ldots\\ \\ \\ \ldots\end{array}\quad \underbrace{\begin{array}{c}9 \text{ e } 0\end{array}}_{1}$$

$10 + 9 + 8 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 55$

Assim temos 16×55 pares.

Considere agora os pares repetidos na centena:
1 e 1, 2 e 2, 3 e 3, 4 e 4 (não pode ser maior ou igual a 5).
Para cada um desses quatro casos teremos, para as dezenas (que agora não podem se repetir e nem mudar a ordem):

$$\underbrace{\begin{array}{c}0 \text{ e } 1\\ 0 \text{ e } 2\\ \vdots\\ 0 \text{ e } 9\end{array}}_{9}\quad \underbrace{\begin{array}{c}1 \text{ e } 2\\ 1 \text{ e } 3\\ \vdots\\ 1 \text{ e } 8\end{array}}_{7}\quad \underbrace{\begin{array}{c}2 \text{ e } 3\\ 2 \text{ e } 4\\ \vdots\\ 2 \text{ e } 7\end{array}}_{5}\quad \underbrace{\begin{array}{c}3 \text{ e } 4\\ 3 \text{ e } 5\\ \vdots\\ 3 \text{ e } 6\end{array}}_{3}\quad \underbrace{\begin{array}{c}4 \text{ e } 5\end{array}}_{1}$$

$9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25$
Teremos, portanto, mais $4 \times 25 = 100$ pares.

No final serão $880 + 100 = 980$ pares que somados dão números palíndromos de três algarismos.

Agora, será necessário acrescentar as somas palíndromas de quatro algarismos. Como devem ser estas somas? Note que para que $aba + cdc$ seja um palíndromo de quatro algarismos, necessariamente $a + c$ deve ser igual a algarismo da dezena de $a + c$. Portanto, $a + c = 11$ (já que o valor máximo possível para a soma de dois algarismos é $9 + 9 = 18$, ou seja, com 1 na dezena). Assim, uma soma palíndroma possível é 1111, obtida a partir de 4 pares: $202 + 909$, $303 + 808$, $404 + 707$ e $505 + 606$ (só podemos ter o zero nas dezenas). Será possível mais alguma soma? Sim, o valor 1221 pode ser atingido se a soma dos algarismos das dezenas ($a + b$ acima) for também 11. Por exemplo: $767 + 454 = 1221$. Isto ocorrerá em:

$$\left.\begin{array}{l}222 \text{ e } 999\\ 232 \text{ e } 989\\ 242 \text{ e } 979\\ 252 \text{ e } 969\\ 262 \text{ e } 959\\ 272 \text{ e } 949\\ 282 \text{ e } 939\\ 292 \text{ e } 929\end{array}\right\} 8 \text{ pares}$$

Mais 8 pares para cada caso 3 e 8, 4 e 7 e 5 e 6 nas centenas.

Teremos no final:
$4 + 32 = 36$ pares que somados dão números palíndromos de 4 algarismos.

Somando com os pares que dão palíndromos de 3 algarismos teremos:
$980 + 36 = 1016$ pares.

4. Seja x o número de meninos da cidade e seja y o número de meninas da cidade. Então, $x + y = 3520$.

O milionário então gastará:

$100 \cdot (x - 0,4x) + 60y = 60 \cdot (x + y) = 60 \cdot 3520 = 211200$ Reais.

Agora, o milionário deixou de gastar R$ 80.000,00 correspondentes aos 40% dos meninos que recusaram a oferta, ou seja:

$100 \cdot 0,4x = 80000 \Longrightarrow x = 2000$ meninos

Portanto há $y = 3520 - 2000 = 1520$ meninas.

5.