



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
IX OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA  
PET – MATEMÁTICA



Gabarito da Prova da ORM – 2ª fase de 2005  
Nível 1

1. José recebeu 34 moedas.

$$\text{João recebeu } \frac{22}{100} \cdot 200 = 44 \text{ moedas.}$$

$$\text{Ricardo recebeu } \frac{1}{4} \cdot 200 = 50 \text{ moedas.}$$

$$\text{Maria então ficou com } 200 - (34 + 44 + 50) = 200 - 128 = 72 \text{ moedas.}$$

2. Observemos as diferenças:

$$107 - 76 = 31.$$

$$107 - 84 = 23.$$

$$149 - 76 = 73.$$

$$149 - 84 = 65.$$

Somente na última obtemos um número composto (65). Isto significa que a soma 84 não faz parte da soma 149 (ou seja, os dois números cuja soma é 84 não fazem ambos parte da soma 149). Mas então 76 faz parte da soma 149, ou seja, 73 é um dos números procurados e faz parte da soma 84. Logo,  $84 - 73 = 11$ , é outro dos números.

Vamos agora descobrir quais são os dois números primos que somados dão 76.

Observe que, da primeira diferença, obtemos 31, que não é nenhum dos dois números que fazem parte da soma 84. Portanto a soma 76 não faz parte da soma 107. Mas então 84 faz parte da soma 107, ou seja, 23 é um dos números procurados e faz parte da soma 76. Logo, o outro número é  $76 - 23 = 53$ .

Os números são: 23, 53, 73 e 11.

Obs:

$$23 + 53 = 76; 73 + 11 = 84; 23 + 53 + 73 = 149 \text{ e } 73 + 11 + 23 = 107.$$

3. A primeira pergunta poderia ser: *Eu estou no País das Maravilhas?* (ou qualquer pergunta que Alice saiba a resposta).

Haverá então duas respostas **SIM** e duas respostas **NÃO**: Uma resposta **SIM** será daquela pessoa que sempre diz a verdade, e a outra daquela que responde a verdade na primeira pergunta; uma resposta **NÃO** será da pessoa que sempre mente, e a outra daquela pessoa que mente na primeira pergunta.

O problema de Alice então é descobrir dentre aquelas que responderam **SIM**, qual a que fala sempre a verdade, e dentre aquelas que responderam **NÃO**, qual a que sempre mente (na verdade, isto é irrelevante).

A segunda pergunta de Alice pode ser a mesma feita na primeira (ou qualquer pergunta que Alice novamente saiba a resposta). Ela obterá então uma pessoa respondendo **SIM**, que havia dito **SIM** na primeira pergunta (esta é a que sempre fala a verdade), uma pessoa respondendo **NÃO**, que havia dito **NÃO** na primeira pergunta (esta é a que sempre mente), e duas pessoas mudando de resposta em relação a primeira pergunta (a que tiver dito **SIM** na segunda pergunta é aquela que mentiu na primeira).

A terceira pergunta de Alice será então: *Qual o caminho para o Palácio do Rei?*, e ela seguirá a resposta da pessoa que sempre fala a verdade.

4. Suponha que o primeiro termo da sequência seja **par**. Então temos duas possibilidades para o segundo termo e, pela condição (i) teríamos:

(a) **P P P P P P** - Não satisfaz a condição (ii);

(b) **P I I P I I** - Não satisfaz a condição (ii) com os últimos cinco termos.

**OBS:** **P** - par, **I** - ímpar.

Suponha agora que o primeiro termo da sequência seja **ímpar**. Então temos duas possibilidades para o segundo termo e, pela condição (i) teríamos:

(a) **I I P I I P** - Não satisfaz a condição (ii) com os cinco primeiros termos;

(b) **I P I I P I** - Satisfaz a condição (ii) para os cinco primeiros termos e para os cinco últimos termos.

Portanto, a sequência deve ser da forma: **I P I I P I**.

Um exemplo é: 123547.

5. Vamos fazer pelo método da árvore das possibilidades, escrevendo inicialmente zero, depois 1...9 nas centenas, colocando em seguida o maior algarismo (9) nas dezenas e decrescendo, e por final colocando o algarismo da unidade, de modo que a soma dos três algarismos seja 18.

$$1 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 9 \\ 9 \end{array} \right.$$

$$2 \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 9 \\ 8 \\ 1 \\ 8 \\ 9 \end{array} \right.$$

$$3 \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 9 \\ 7 \\ 2 \\ 8 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \\ 9 \end{array} \right.$$

$$4 \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 9 \\ 6 \\ 3 \\ 8 \\ 7 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 3 \\ 6 \\ 9 \end{array} \right.$$

$$5 \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 9 \\ 5 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 4 \\ 5 \\ 9 \end{array} \right.$$

$$6 \left\{ \begin{array}{l} 5 \\ 9 \\ 4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 5 \\ 4 \\ 9 \end{array} \right.$$

$$7 \left\{ \begin{array}{l} 6 \\ 9 \\ 3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 6 \\ 3 \\ 9 \end{array} \right.$$

$$8 \left\{ \begin{array}{l} 7 \\ 9 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 7 \\ 2 \\ 9 \end{array} \right.$$

$$9 \left\{ \begin{array}{l} 8 \\ 9 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 8 \\ 1 \\ 9 \end{array} \right.$$

$$10 \left\{ \begin{array}{l} 9 \\ 9 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 9 \\ 0 \\ 9 \end{array} \right.$$

Portanto teremos  $1 + 2 + \dots + 9 + 10$  placas cuja soma dos algarismos é igual a 18. Ora, tal soma é igual a

$$\underbrace{(1 + 10)}_{11} + \underbrace{(2 + 9)}_{11} + \underbrace{(3 + 8)}_{11} + \underbrace{(4 + 7)}_{11} + \underbrace{(5 + 6)}_{11} = 5 \times 11$$