

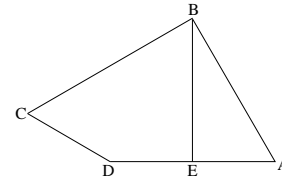


UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
VII OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA



Prova 2ª fase de 2004
Nível 3

1. Considere o quadrilátero ABCD da figura em que $\overline{AB}=2$, $\overline{AE}=\overline{DE}=1$, $\overline{BE} \perp \overline{AD}$, $\angle EBC = 60^\circ$ e $\angle DCB = 60^\circ$. Qual é a área do $\square ABCD$?



2. A sociedade kardaliana usava um sistema posicional com apenas quatro algarismos distintos para representar os números naturais: \leftarrow , \rightarrow , \uparrow e \downarrow . Eles desenvolveram as operações de adição e multiplicação e descobriram que as operações que envolvem somente adição ou multiplicação podiam ser reordenadas ou agrupadas de qualquer modo sem alterar o resultado (propriedades associativa e comutativa) e que a multiplicação distribuía sobre a adição ($x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$). Os valores básicos das operações são dados abaixo:

+	\leftarrow	\rightarrow	\uparrow	\downarrow
\leftarrow	\leftarrow	\rightarrow	\uparrow	\downarrow
\rightarrow	\rightarrow	\uparrow	\downarrow	$\rightarrow\leftarrow$
\uparrow	\uparrow	\downarrow	$\rightarrow\leftarrow$	$\rightarrow\rightarrow$
\downarrow	\downarrow	$\rightarrow\leftarrow$	$\rightarrow\rightarrow$	$\rightarrow\uparrow$

\times	\leftarrow	\rightarrow	\uparrow	\downarrow
\leftarrow	\leftarrow	\leftarrow	\leftarrow	\leftarrow
\rightarrow	\leftarrow	\rightarrow	\uparrow	\downarrow
\uparrow	\leftarrow	\uparrow	$\rightarrow\leftarrow$	$\rightarrow\uparrow$
\downarrow	\leftarrow	\downarrow	$\rightarrow\uparrow$	$\uparrow\rightarrow$

- (a) Qual é a representação no sistema kardaliano para o nosso ‘0’ e para o nosso ‘1’?
 (b) Qual é o primeiro número que é representado com dois dígitos? E com três dígitos?
 (c) Qual é a relação entre os dois números do item (b)?
 (d) Represente o valor das seguintes expressões no sistema kardaliano:
 i. $\rightarrow\downarrow\leftarrow + \uparrow\rightarrow\uparrow + \downarrow\leftarrow\uparrow$.
 ii. $\rightarrow\downarrow \times \uparrow\leftarrow \times \downarrow\rightarrow\uparrow$.
3. Considere a “máquina de transformar números”, que funciona conforme as seguintes regras:
 (a) recebe um número e remove seu primeiro algarismo, guardando o número resultante;
 (b) pega o resultado de (a), inverte a ordem dos seus algarismos e guarda o número;
 (c) soma os algarismos do número gerado em (b) e anexa a soma ao lado direito do número;
 (d) mostra o resultado final.

Exemplos: • $9987 \rightarrow 987 \rightarrow 789 \rightarrow 78924$.
 • $1023 \rightarrow 23 \rightarrow 32 \rightarrow 325$.

ALERTA! No sistema posicional de representação de números, não se permite o algarismo ‘0’ no lado esquerdo da representação.

Quais são os números de seis algarismos que não são alterados pela “máquina”?

4. Considere a função $f(x) = \frac{16}{x-1} + \frac{32}{x-2}$ definida nos pontos do intervalo $[0, 3]$, exceto nos pontos 1 e 2. Suponha que L é uma lista de números, em ordem crescente, que começa em zero, termina em 3 e tal que os pares de números consecutivos de L dividem o intervalo em quinhentos sub-intervalos de comprimentos iguais. Qual ponto x de L faz com que $f(x)$ seja o maior valor possível?
5. Encontre primos p e q tais que $25p + q = 2004$, com $400 \leq q \leq 600$.