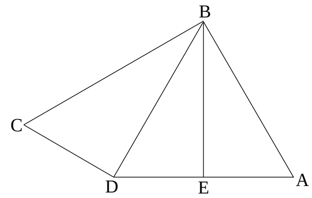
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
VII OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA

Gabarito da Prova da ORM – 2ª fase de 2004
Nível 3

1.



Tracemos $\overline{BD}$. Como $\overline{BE}$ é altura e mediana do $\triangle ABD$, então $AB = BD$. Mas $AB = 2 = AD$. Logo, o $\triangle ABD$ é equilátero. Assim, $\measuredangle E\hat{B}D = 30^o$. Segue que $\measuredangle D\hat{B}C = 30^o$ (pois $\measuredangle E\hat{B}C = 60^o$) e, como $\measuredangle D\hat{C}B = 60^o$, o $\triangle BCD$ é retângulo em D e, portanto, semelhante ao $\triangle ABE$. Mas $BE^2 = AB^2 - AC^2 = 4 - 1 = 3$. Logo, $BE = \sqrt{3}$.

Assim, da semelhança, temos:

$$\frac{BD}{BE} = \frac{CD}{AE} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{CD}{1} \Rightarrow CD = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Assim:

$$A_{\triangle ABD} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$
$$A_{\triangle BCD} = \frac{2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Portanto, $A_{\square ABCD} = \sqrt{3} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \boxed{\dfrac{5\sqrt{3}}{3}}$.

2. (a) Pelas tabelas, vemos que $\leftarrow$ corresponde ao nosso '0', pois ele somado a qualquer um dos outros algarismos não os altera, e que $\rightarrow$ corresponde ao nosso '1', pois multiplicado por qualquer um dos outros algarismos ele não os altera.

(b) O primeiro número representado por dois dígitos é $\rightarrow\leftarrow$ (observe que, na tabela da adição, este é o primeiro número que surge nas linhas 2,3 e 4). O primeiro número com 3 dígitos deve ser, então, $\rightarrow\leftarrow\leftarrow$ (corresponderia a '100' em um sistema posicional de 4 algarismos).

(c) Observe que, usando a distributividade, temos:

$$\uparrow \times (\rightarrow\leftarrow) = (\rightarrow + \rightarrow) \times (\rightarrow\leftarrow) = \rightarrow \times \rightarrow\leftarrow + \rightarrow \times \rightarrow\leftarrow = \rightarrow\leftarrow + \rightarrow\leftarrow,$$

pois $\rightarrow$ não altera o número na multiplicação.
Prolongando-se a tabela da adição, é fácil ver que

$$\rightarrow\leftarrow + \rightarrow\leftarrow = \uparrow\leftarrow, \text{ ou seja, } \uparrow \times (\rightarrow\leftarrow) = \uparrow\leftarrow .$$

Daí, conclui-se que $\downarrow \times (\rightarrow\leftarrow) = \downarrow\leftarrow$ e que $(\rightarrow\leftarrow) \times (\rightarrow\leftarrow) = \rightarrow\leftarrow\leftarrow$, ou seja, $\rightarrow\leftarrow\leftarrow$ é o quadrado de $\rightarrow\leftarrow$. Este raciocínio (com as propriedades distributiva e associativa) nos permite ver que as operações nesse sistema podem ser feitas como no nosso sistema decimal (como, por exemplo, $3 \times 8 = 24$: escrevemos o 4 e "vão" 2). É isso que usaremos no próximo ítem.

(d) i. $(\rightarrow\downarrow\leftarrow) + (\uparrow\rightarrow\uparrow) + (\downarrow\leftarrow\uparrow) = \boxed{\rightarrow\downarrow\rightarrow\leftarrow}$, pois:

$$\begin{array}{ccccc}
 & (\rightarrow) & (\rightarrow) & & \\
 & \rightarrow & \downarrow & \leftarrow & \\
 & \uparrow & \rightarrow & \uparrow & + \\
 & \downarrow & \leftarrow & \uparrow & \\
\hline
\rightarrow & \downarrow & \rightarrow & \leftarrow &
\end{array}$$

ii. $(\rightarrow\downarrow\times\uparrow\leftarrow)\times\downarrow\rightarrow\uparrow=(\downarrow\uparrow\leftarrow)\times\downarrow\rightarrow\uparrow$, pois:

$$\begin{array}{ccccc} & & & \rightarrow & \downarrow \\ & & \times & \uparrow & \leftarrow \\ \hline & & & \leftarrow & \leftarrow \\ (\uparrow & + & \rightarrow) & \uparrow & \\ & \downarrow & & & \\ \hline & \downarrow & & \uparrow & \rightarrow \end{array}$$

Então, $\downarrow\uparrow\leftarrow\times\downarrow\rightarrow\uparrow=\boxed{\uparrow\downarrow\downarrow\rightarrow\leftarrow\leftarrow}$.

3. Seja $abcdef$ um número de seis algarismos (com $a \neq 0$). Vejamos: $abcdef \rightarrow bcdef \rightarrow fedcb \rightarrow fedcbx$.

(a) $\underline{f \neq 0}$. Então:

i. ou $b \neq 0$, mas, neste caso, $x = f$ e $x = f + e + d + c + b$. Impossível.

ii. ou $b = 0$. Temos, então:

A. $c \neq 0$. Neste caso, $a0cdef \rightarrow cdef \rightarrow fedc \rightarrow fedcx$, em que x tem dois algarismos, $x = f + e + d + c = 10e + f$. Daí, $d + c = 9e$. Mas então, $a = f$, $b = e = 0$ e $d + c = 0$, o que faria $c = 0$. Contradição.

B. $c = 0$. Neste caso, $a00def \rightarrow def \rightarrow fed \rightarrow fedx$, em que $x = f + e + d$ e tem três algarismos. Impossível.

Então, só resta o caso:

(b) $\underline{f = 0}$.

Se $b = 0$, teremos: $a0cde0 \rightarrow cde0 \rightarrow edc \rightarrow edcx$, em que $x = e + d + c$ e tem três algarismos. Impossível. Então, se $f = 0$, devemos ter $b \neq 0$. Daí: $abcde0 \rightarrow bcde0 \rightarrow edcb \rightarrow edcbx$, em que x deve ter dois algarismos e $x = e + d + c + b = 10e$. Então, $d + c + b = 9e$. Além disso, $a = e$ e $b = d$. A soma máxima de três algarismos é 27. Assim, temos:

i. $\underline{e = 0}$; neste caso, $d + c + b = 0 \Rightarrow d = c = b = 0$. Impossível.

ii. $\underline{e = 1}$; neste caso, $a = e = 1$ e $d + b + c = 9$.

$$\therefore \begin{cases} c = 1 & \Rightarrow & d = b = 4 & \Rightarrow & \boxed{141410} \\ c = 3 & \Rightarrow & d = b = 3 & \Rightarrow & \boxed{133310} \\ c = 5 & \Rightarrow & d = b = 2 & \Rightarrow & \boxed{125210} \\ c = 7 & \Rightarrow & d = b = 1 & \Rightarrow & \boxed{117110} \\ c = 9 & \Rightarrow & d = b = 0 & \Rightarrow & \text{Impossível} \end{cases}$$

iii. $\underline{e = 2}$; neste caso, $a = e = 2$ e $d + c + b = 18$.

$$\therefore \begin{cases} c = 0 & \Rightarrow & d = b = 9 & \Rightarrow & \boxed{290920} \\ c = 2 & \Rightarrow & d = b = 8 & \Rightarrow & \boxed{282820} \\ c = 4 & \Rightarrow & d = b = 7 & \Rightarrow & \boxed{274720} \\ c = 6 & \Rightarrow & d = b = 6 & \Rightarrow & \boxed{266620} \\ c = 8 & \Rightarrow & d = b = 5 & \Rightarrow & \boxed{258520} \end{cases}$$

iv. $\underline{e = 3}$; neste caso, a=e=3 e $d + c + b = 27 \Rightarrow b = c = d = 9 \Rightarrow \boxed{399930}$.

4. Para valores de x próximos de 1 a primeira fração, em valor absoluto, é "muito grande". O mesmo vale para valores de x próximos a 2. Vamos analisar os valores $f(x)$ para os quatro pontos da lista L mais próximos de 1 e de 2. Os pontos de L são: 0, $\frac{3}{500}$, $\frac{6}{500}$, etc. Devemos, então, tomar o maior valor da lista menor do que 1, o menor valor maior do que 1, o maior valor menor do que 2 e o menor valor maior do que 2. São eles: $x_1 = \frac{498}{500}$, $x_2 = \frac{501}{500}$, $x_3 = \frac{999}{500}$, $x_4 = \frac{1002}{500}$ respectivamente.

O valor x_1 está descartado, pois $f(x_1) < 0$. Descartamos também x_3, pois: $|x_3 - 2| < |x_3 - 1|$, o que nos dá $\frac{1}{|x_3-1|} < \frac{1}{|x_3-2|}$, ou $\frac{16}{|x_3-1|} < \frac{16}{|x_3-2|} < \frac{32}{|x_3-2|}$, e, como $\frac{32}{x_3-2} < 0$, $f(x_3) < 0$.

Vamos analisar $f(x_2)$ e $f(x_4)$:

$$f(x_2) = \frac{16}{\frac{501}{500} - 1} + \frac{32}{\frac{501}{500} - 2} = 16 \times 500 - \frac{32 \times 500}{499} = 16 \times 500 \times \frac{497}{499}.$$

$$f(x_4) = \frac{16}{\frac{1002}{500} - 1} + \frac{32}{\frac{1002}{500} - 2} = \frac{16 \times 500}{502} + \frac{32 \times 500}{2} = 16 \times 500 \times \frac{503}{502}.$$

Mas $\frac{497}{499} < 1 < \frac{503}{502}$. Logo, $\boxed{f(x_4)}$ é o maior valor.

5. De $400 \leq q \leq 600$, temos $-600 \leq -q \leq -400$.

$$\therefore 2004 - 600 \leq 2004 - q \leq 2004 - 400 \Rightarrow 1404 \leq 25p \leq 1604 \Rightarrow 56,16 \leq p \leq 64,16.$$

Os primos nessa faixa são 59 e 61. Se $p = 59$, $q = 2004 - 25 \times 61 = 529$. Porém, $529 = 23^2$. Se $p = 61$, $q = 2004 - 25 \times 61 = 479$. Este número é primo (basta testar a sua divisibilidade por primos até o 19). Portanto, $\boxed{p = 61 \text{ e } q = 479}$.