UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
VII OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA

Gabarito da Prova da ORM – 2ª fase de 2004
Nível 2

1.

- Pelas tabelas vemos que $\leftarrow$ corresponde ao nosso "0", pois somado com qualquer um dos outros algarismos não os altera, e que $\rightarrow$ corresponde ao nosso "1", pois multiplicado com qualquer um dos outros algarismos não os altera.
- O primeiro número representado por 2 dígitos é $\rightarrow\leftarrow$ (observe que, na tabela da adição, este é o primeiro número que surge nas linhas 2,3 e 4). O primeiro número com 3 dígitos deve ser então $\rightarrow\leftarrow\leftarrow$ (corresponderia ao "100"em um sistema posicional de 4 algarismo).
- Observe que, usando a distributividade, temos:

$$\uparrow \text{x}(\rightarrow\leftarrow) = (\rightarrow + \rightarrow)\text{x}(\rightarrow\leftarrow) =\rightarrow \text{x} \rightarrow\leftarrow + \rightarrow \text{x} \rightarrow\leftarrow=\rightarrow\leftarrow + \rightarrow\leftarrow,$$

pois $\rightarrow$ não altera o número na multiplicação.
Prolongando-se a tabela de adição é fácil ver que

$$\rightarrow\leftarrow + \rightarrow\leftarrow=\uparrow\leftarrow, \text{ou seja,}$$

$$\uparrow \text{x}(\rightarrow\leftarrow).$$

Daí concluí-se que $\downarrow \text{x}(\rightarrow\leftarrow) =\downarrow\leftarrow$ e que

$$\rightarrow\leftarrow \text{ x } \rightarrow\leftarrow=\rightarrow\leftarrow\leftarrow, \text{ ou seja,}$$

$\rightarrow\leftarrow\leftarrow$ é o quadrado de $\rightarrow\leftarrow$.
Este raciocínio (com as propriedades distributiva, associativa)nos permite ver que as operações nesse sistema podem ser feitas como no nosso sistema decimal (como por exemplo: 3x8 = 24, escrevemos o 4 "vão"2).
É isso que usaremos, na prática, aqui para o próximo item.

- $\rightarrow\downarrow \text{ x } \uparrow\leftarrow=\downarrow\uparrow\leftarrow$, pois:

$$\begin{array}{ccc}
 & \rightarrow & \downarrow \\
\text{x} & \uparrow & \leftarrow \\
\hline
 & \leftarrow & \leftarrow \\
(\uparrow + \rightarrow) & \uparrow & \\
\hline
\downarrow & \uparrow & \leftarrow
\end{array}$$

e
$\downarrow\uparrow\leftarrow + \downarrow\rightarrow\uparrow=\rightarrow\uparrow\downarrow\uparrow$, pois:

$$\begin{array}{ccccc}
 & \downarrow & \uparrow & \leftarrow & \\
 & \downarrow & \rightarrow & \uparrow & + \\
\hline
\rightarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow &
\end{array}$$

2. Seja $abcde$ um número de 5 algarismos ($a \neq 0$). Então a máquina faz:

$$abdde \rightarrow bcde \rightarrow edcb \rightarrow edcbx, \text{ onde}$$

$$x = e + d + c + +b$$

Temos então duas possibilidades:

- $e \neq 0$. neste caso, como $x = 2$ (para que o número não se alternar), então $e = e + d + c + b$, ou seja, $d + c + b = 0$, que é impossível. (isto se $b \neq 0$).

- $e = 0$. Neste caso temos: $abcd0 \to bcd0 \to dcb \to dcbx$, onde x deve ser um número de 2algarismos terminando em zero.
  E $x = d + c + b$. Há então duas possibilidades:
  (note que aqui $b \neq 0$ pois, caso contrário, teríamos $x = d + c$ e x com 3 algarismos).
  (a) $x = 10 = d + c + b$.Mas então $d = 1$, $a = d = 1$, $b = c$.
  Segue-se que $b + c = 9$, o que é impossível, pois $b = c$.
  (b) $x = 20 = d + c + b$. Então $d = 2$, $a = d = 2$,$b = c$. Segue-se que $b + c = 18$ e daí $b = c = 9$ (única resposta).

  Portanto o único número que não é alterado pela máquina é:

$$29920$$

3. Note que $2004 = 167 \cdot 2^2 \cdot 3$. (167 é primo)
Assim:

$$167 + p + q = 167 \cdot 12, \text{ ou } q = 167(12 - p)$$

Como q deve ser primo, então $12 - p = 1$, ou seja, $p = 11$.
Resposta: $p = 11$ e $q = 167$.

4. Analisando-se os 3 grupos de 4 caixas, e sabendo que nenhuma caixa esta vazia, temos:

4 kg	6 kg	18 kg
$\boxed{1}$	□	□
$\boxed{1}$	□	□
$\boxed{1}$	□	□
$\boxed{1}$	□	□
(única possibilidade)	Duas possibilidades	?

As duas possibilidades são:

- $1 + 1 + 1 + 3 = 6$
- 1+1+2+2=6

No primeiro caso pelo menos 7 caixas com exatamente uma barra.
Olhando para os 4 grupos de 3 caixas teremos a única possibilidade:

7 kg	7 kg	7 kg	7 kg	
$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	
$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	← (a caixa de 3 kg deve estar aqui)
$\boxed{5}$	$\boxed{5}$	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$	$\to 18kg$

No segundo caso temos pelo menos 6 caixas com exatamente uma barra. Então temos duas possíveis soluções, olhando nos grupos de 3 caixas:

$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	←	(as caixas com 2 kg devem estar aqui)		$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	↙		ou	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$
$\boxed{5}$	$\boxed{5}$	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$				$\boxed{5}$	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{4}$

Portanto a maior quantidade de ouro em uma caixa é 5 kg, e há 3 possíveis distribuições.

5. De 3 de Agosto de 1845 a 2 de agosto de 1845 (inclusive), temos 4 anos completos (sendo 1 bissexto: 1848).
Assim temos:

$$4 \cdot 365 + 1 = 1461 \text{ dias, neste período}$$

O Sr. Silva não trabalhou todos estes dias mas ele viajou por 3 dias, da manhã de 18 de julho de 1849 a manhã 21 de julho de 1849, quando chegou à Terra do Sonho. Ele permanece (pelo menos) 10 dias lá: da manhã de 21 de julho até a noite de 30 de julho (ou até a manhã de 31 de julho). Se ele voltasse para Shangrilá no dia 30 de julho (de manhã ou a noite), ele chegaria lá no dia 2 de Agosto (de manhã ou a noite). Assim, depois que chega a Shangrilá saindo de Eldorado (no dia 3 de Agosto de 1845) até o dia 2 de Agosto de 1849 (possível volta da Terra do Sonho) passaram-se 1461 dias. Mas

$$1461 = 27 \cdot 54 + 3$$

Assim, o navio já haverá passado 3 dias antes, ou seja, no dia 30 de Julho. O próximo navio passará 27 dias depois, ou seja, no dia 26 de Agosto. Assim, **Sr. Silva deve partir de Shangrilá no dia 23 de Agosto** (pela manhã), para chegar no dia 26 de Agosto, pela manhã, e tomar o navio neste mesmo dia no final da tarde.