UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
VII OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA

Gabarito da Prova da ORM – 2ª fase de 2004
Nível 1

1. (a) Lalá fica em Lobélia 3 dias por semana, nas quatro semanas (4 fins de semana) do mês. Portanto Lalá fica 12 dias por mês em Lobélia. Assim $\frac{12}{30}$ das despesas do mês devem ser repartidas entre as três amigas, e o resto entre Lelé e Lilí:

$$\frac{12}{30} \times 840 = 336 \quad , \quad \text{e} \quad 336 \div 3 = 112.$$

Agora, $840 - 336 = 504$, e $504 \div 2 = 252$.

Ainda: $252 + 112 = 364$. Portanto: Lalá pagará R$112,00 e Lelé e Lilí R$364,00 cada uma.

(b) $1100 + 112 = 1212$. Assim sobram pra Lalá: $2004 - 1212 = 792$ reais por mês.

2. Seja $abcd$ um número em que a, b, c, d, são algarismos com $a \neq 0$ (número de 4 algarismos). Então a máquina faz o seguinte:

$$abcd \longrightarrow bcd \longrightarrow dcb \longrightarrow dcbx,$$

em que x deve ser a soma dos algarismos d, c e b. Por outro lado, como queremos que $abcd$ não seja alterado por esta máquina, teremos duas possibilidades:

(i) $d \neq 0$ e , neste caso, x deve ser igual a d, ou seja, a soma de d,b, e c deve ser igual a d. Mas isto implica que a soma de b com c seja igual a zero, o que é impossível.

Resta-nos então:

(ii) $d = 0$ e teremos:

$$abc0 \longrightarrow bc0 \longrightarrow cb \longrightarrow cbx,$$

em que $x = b + c$ e esta soma deve ser um número de dois algarismos terminados em zero. A única possibilidade é $x = 10$. Portanto temos:

$$abc0 \longrightarrow bc0 \longrightarrow cb \longrightarrow cb10.$$

Daí concluímos: $c = 1$, $a = c = 1$. Como $b + c = 10$, temos $b = 9$.

Portanto o número (o único) que não se altera pela máquina é: 1910.

3. Pela repartição em quatro grupos de três caixas, cada um pesando 7Kg, sabemos que o total de ouro nas caixas é 28Kg (4×7). Como não há caixas vazias, e como na repartição em grupos de quatro caixas há um grupo pesando 4Kg e outro pesando 5 Kg, teremos para estes grupos:

4Kg	+	5Kg	+	19Kg	=28
$\boxed{1}$		$\boxed{2}$		$\boxed{}$	
$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{}$	
$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{}$	
$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{}$	

Portanto, pelo menos 7 caixas possuem exatamente 1Kg de ouro cada. Olhando a distribuição em quatro grupos de três caixas cada teremos:

7Kg	7Kg	7Kg	7Kg
$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$
$\boxed{5}$	$\boxed{5}$	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$

Observe que esta é a única distribuição possível das barras de 1Kg nas caixas dos grupos e que a caixa com 2Kg deve pertencer ao quarto grupo. Portanto 3 caixas devem conter 5Kg de ouro e a última caixa do quarto grupo deve conter 4Kg de ouro. Estas últimas caixas compõem o terceiro grupo de 4 caixas:

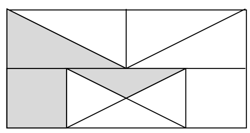
$$5 + 5 + 5 + 4 = 19.$$

Portanto a maior quantidade de ouro em uma caixa é 5Kg e há uma única distribuição possível.

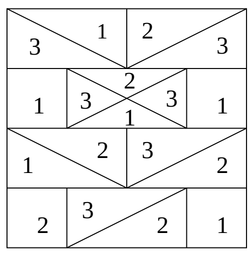
4. O Sr. Silva trabalhou exatamente 365 dias. Tirou 20 dias de férias, ou seja, de 3 de Agosto de 1846 a 22 de agosto de 1846 (inclusive). Portanto, desde sua chegada a Shangrilá até o dia 22 de agosto de 1846 passaram-se 385 (365+20) dias. Mas
$$385 = 27 \times 14 + 7.$$
Portanto o último navio passou em Shangrilá no dia 16 de Agosto de 1846 (de 16 a 22 de Agosto, inclusive são 7 dias). O próximo navio passará daí a 27 dias. Contando, temos 15 dias em Agosto (sem contar o dia 16 até 31 de Agosto). Mais 12 dias em Setembro e teremos 27 dias.

   Portanto o Sr. Silva poderá voltar para sua cidade natal no dia 12 de Setembro de 1846 (se quiser voltar na primeira data possível).

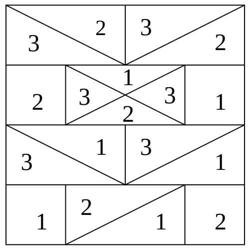
5. Com uma cor é obviamente impossível.
Com duas cores também é impossível pois há regiões contíguas com um mesmo lado contíguo a duas outras regiões:



Vejamos então com 3 cores. Uma possibilidade é (cores 1, 2 e 3):



Mas esta possibilidade não permite juntar estes ladrilhos lado a lado nem um sobre o outro (mesmo rotacionando-os). Uma solução é:



Nesta solução os ladrilhos devem ser colocados nesta posição sempre.
Há outras soluções.