XXI OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE SANTA CATARINA
Resolução do treinamento 4 – Nível 3

Problema 1. (ITA 2015) Se x é um número natural com 2015 dígitos, então o número de dígitos da parte inteira de raiz sétima de x é igual a:

a) 230 b) 288 c) 106 d) 287 e) 987.

Resolução: Veja que $10^{2014} \leq x < 10^{2015}$, como a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = \sqrt[7]{x}$ é crescente, podemos dizer que $\sqrt[7]{10^{2014}} \leq \sqrt[7]{x} < \sqrt[7]{10^{2015}}$.

Então $10^{2014/7} \leq \sqrt[7]{x} < 10^{2015/7}$, veja que $2014 = 7.287 + 5$ e $2015 = 7.287 + 6$, ou seja:

$$10^{287} \cdot 10^{5/7} \leq \sqrt[7]{x} < 10^{287} \cdot 10^{6/7}.$$

Como $10^{5/7} > 1$ e $10^{6/7} < 10$, então $10^{287} < \sqrt[7]{x} < 10^{288}$. Com isso, temos que $10^{287} \leq \lfloor \sqrt[7]{x} \rfloor < 10^{288}$, onde $\lfloor \sqrt[7]{x} \rfloor$ é a parte inteira de $\sqrt[7]{x}$. Assim, concluímos que $\lfloor \sqrt[7]{x} \rfloor$ tem 288 dígitos.

(**Alternativa B**)

Problema 2. Dado um decágono regular qualquer, quantos são os triângulos cujos vértices são vértices não consecutivos do decágono?

a) 80 b) 100 c) 120 d) 15 e) 50.

Resolução: Calcularemos o número de triângulos que possuem vértices consecutivos. Veja que um triângulo possui dois vértices consecutivos se, e somente se, pelo menos um dos lados do triângulo é um dos lados do decágono.

Calcularemos a quantidade de triângulos que possuem apenas dois vértices consecutivos. Fixe um dos lados do decágono, assim podemos formar 6 triângulos distintos com esse lado (pois, temos 10 vértices e descontaremos os dois que já escolhemos e os dois que formam lados adjacentes ao lado escolhido). Multiplicando por 10 temos um total de 60 triângulos que possuem apenas dois vértices consecutivos.

Calcularemos a quantidade de triângulos com três vértices consecutivos. Como os três vértices desses triângulos são consecutivos, faz sentido falar no vértice intermediário. Para cada vértice podemos construir um único triângulo, com três vértices consecutivos, de modo que este vértice seja o intermediário. Como temos 10 vértices, então temos 10 triângulos com três vértices consecutivos.

Note que o total de triângulos é simplesmente a combinação $C_{10,3} = 120$. Ainda mais, o número de triângulos do decágono sem vértices consecutivos é igual ao número de total de triângulos menos o número de triângulos com dois vértices consecutivos e o número de triângulos com todos os vértices consecutivos. Assim concluímos que o número de triângulos sem vértices consecutivos é $120 - 60 - 10 = 50$.

(**Alternativa E**)

Problema 3. Quantos primos positivos p existem de modo que $p^2 + 11$ tenha no máximo seis divisores distintos incluindo 1 e $p^2 + 11$.

a) 1 b) 2 c) 6 d) 13 e) Infinitos.

Resolução: Veja que se p diferente de 2, então p é ímpar pois o 2 é o único primo par. Como p é impar, então ele é da forma $2k + 1$ para algum k inteiro positivo, com isso:

$$p^2 + 11 = (2k + 1)^2 + 11 = 4k^2 + 4k + 12 = 4(k^2 + k + 3).$$

Ou seja, 4 divide $p^2 + 11$. Perceba também que se p é diferente de 3, então $p = 3k + 1$ ou $p = 3k + 2$ para algum k inteiro, pois se $p = 3k$ então p não seria primo.

Caso $p = 3k + 1$ então $p^2 + 11 = (3k + 1)^2 + 11 = 9k^2 + 6k + 12 = 3(3k^2 + 2k + 4)$, ou seja, 3 divide $p^2 + 11$.
Caso $p = 3k + 2$ então $p^2 + 11 = (3k + 2)^2 + 11 = 9k^2 + 12k + 15 = 3(3k^2 + 4k + 5)$, ou seja, 3 divide $p^2 + 11$.
Disso, tiramos que se p é diferente de 2 e de 3, então 3 e 4 dividem $p^2 + 11$, isto é, 12 divide $p^2 + 11$.

Como 12 divide p^2+11 então todos os divisores de 12 são também divisores de p^2+11, mas 12 já possui 6 divisores. Como p^2+11 é necessariamente maior que 12, então p^2+11 possui no mínimo 7 divisores (ele próprio e os 6 divisores de 12).

Se p=2 então p^2+11=15 que possui 4 divisores.

Se p=3 então p^2+11=20 que possui 6 divisores.

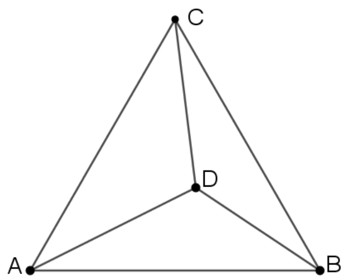
Com isso concluímos que $p=2$ ou $p=3$, isto é, existem apenas 2 primos que satisfazem o enunciado.

(**Alternativa B**)

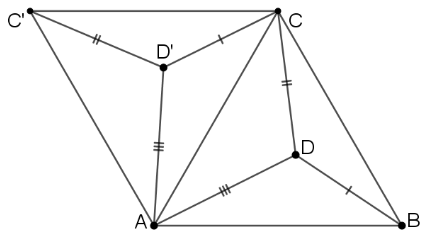
Problema 4. Dado um ponto D qualquer no interior de um triângulo equilátero $\triangle ABC$, determine o conjunto que possui dois dos ângulos do triângulo cujos lados tem comprimento AD, BD e CD. Os ângulos estão em função de $A\widehat{D}C = x$ e $A\widehat{D}B = y$.

a) $\{x, 180° - y\}$ b) $\{75° - x + y, y\}$ c) $\{x, y + 60°\}$ d) $\{300° - x - y, x - 60°\}$ e) $\{x, y\}$.

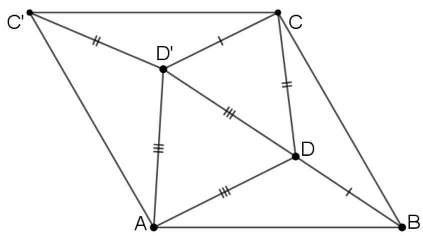
Resolução: Do enunciado temos a seguinte configuração:



Podemos fazer uma rotação de 60° com centro no ponto A.



Veja que $D\widehat{A}D' = 60°$ pela rotação e $\overline{AD} \equiv \overline{AD'}$ também pela rotação, logo $\triangle ADD'$ é equilátero.



Como $\triangle ADD'$ é equilátero, então $\overline{AD} \equiv \overline{DD'}$. Isso implica que o triângulo $\triangle CDD'$ é congruente ao triângulo do enunciado.

Veja que, por $\triangle ADD'$ ser equilátero, temos que $C\widehat{D}D' = x - 60°$ e $C\widehat{D'}D = y - 60°$. Com isso, pela soma dos ângulos internos em $\triangle CDD'$, temos que $x - 60° + y - 60° + D\widehat{C}D' = 180°$, ou seja, $D\widehat{C}D' = 300° - x - y$.

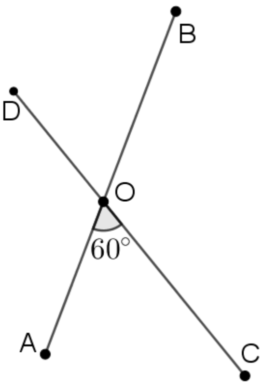
Logo, os ângulos do triângulo do enunciado são $x - 60°$, $y - 60°$ e $300° - x - y$.

(**Alternativa D**)

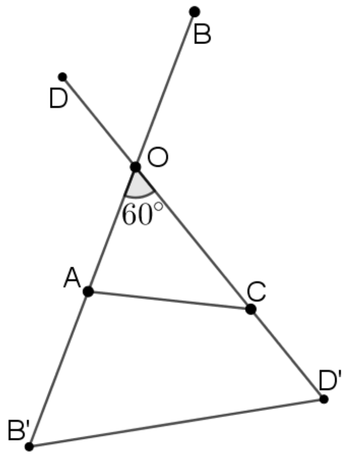
Problema 5. Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ segmentos de comprimento 1 que se intersectam em O. Se $B\widehat{O}D = A\widehat{O}C = 60°$ e $AC + BD = x$ então:

a) $0 < x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}}{3} < x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3} < x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} < x < 1$ e) $x \geq 1$.

Resolução: Do enunciado temos a seguinte configuração:

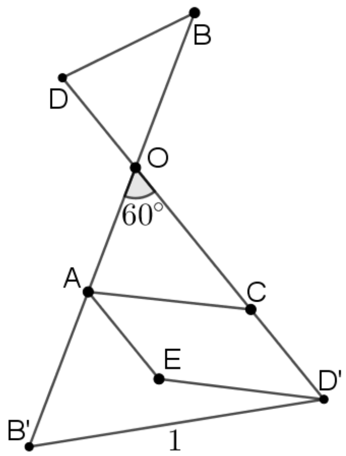


Tomando o ponto B' como sendo o ponto pertencente a semirreta $\overrightarrow{OA}$ de forma que $\overline{OB'}$ tenha comprimento 1, e tomando o ponto D' pertencente a semirreta $\overrightarrow{OC}$ de forma que $\overline{OD'}$ tenha comprimento 1, temos a seguinte configuração:

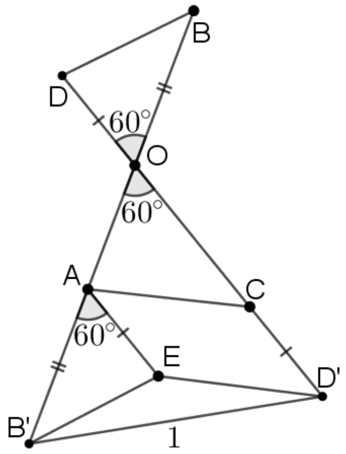


Sendo assim, o triângulo $\triangle OB'D'$ é isósceles pois $\overline{OB'} \equiv \overline{OD'}$. Ademais, ele é equilátero, pois um de seus ângulos é $60°$. Logo, o triângulo $\triangle OB'D'$ é equilátero de lado 1.

Agora construa o paralelogramo $ACD'E$:



Como $DO + OC = 1 = OC + CD'$, então $DO = CD'$. Agora veja que $\overline{CD'} \equiv \overline{AE}$ pois $ACD'E$ é paralelogramo, então $\overline{DO} \equiv \overline{CD'} \equiv \overline{AE}$, logo, $DO = AE$. Como $ACD'E$ é paralelogramo, então a reta $\overleftrightarrow{AE}$ é paralela a reta $\overleftrightarrow{CD'}$ e disso concluímos que o ângulo $\angle B'AE$ é congruente a $\angle B'OD'$. Perceba que $D\widehat{O}B = D'\widehat{O}B' = B'\widehat{A}E$ e $\overline{BO} \equiv \overline{AB'}$, o que implica que o triângulo $\triangle B'AE$ é congruente ao triângulo $\triangle BOD$, então $B'E = BD$.



Por fim, como $ACD'E$ é paralelogramo então $AC = ED'$. Suponha que B', E e D' são pontos não colineares, logo pela desigualdade triangular em $\triangle B'ED'$ temos que $B'E + ED' > 1$ ou seja $DB + AC > 1$. Note que caso B', E e D' são pontos colineares então $B'E + ED' = DB + AC = 1$. Concluímos então que $DB + AC \geq 1$.

(**Alternativa E**)

Problema 6. Existe um único polinômio $P(x)$ de quarto grau com coeficientes inteiros tal que o coeficiente do termo de maior grau é 1 e o número $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é raiz desse polinômio. Qual a soma dos coeficientes de $P(x)$?

a) -3 b) 0 c) 1 d) 3 e) 8.

Resolução: Perceba que $0 < \sqrt{2}+\sqrt{3} = \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} = \sqrt{5+2\sqrt{6}}$, então $1+\sqrt{2}+\sqrt{3} = 1+\sqrt{5+2\sqrt{6}}$. Note que os polinômios que possuem uma raiz do tipo $a+\sqrt{b}$, em geral, possuem também a raiz $a-\sqrt{b}$, então é razoável pensar em construir o polinômio $Q(x)$ que possui raízes $1+\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ e $1-\sqrt{5+2\sqrt{6}}$, para isso basta fazer:

$$\begin{aligned}
Q(x) &= \left[x - \left(1+\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)\right]\left[x - \left(1-\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)\right]\\
&= \left[(x-1) - \sqrt{5+2\sqrt{6}})\right]\left[(x-1) + \sqrt{5+2\sqrt{6}}\right]\\
&= (x-1)^2 - (5+2\sqrt{6})\\
&= x^2 - 2x - 4 - 2\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

Construiremos o polinômio $R(y)$ com raízes $4+2\sqrt{6}$ e $4-2\sqrt{6}$, para isso basta fazer:

$$\begin{aligned}
R(y) &= \left[y - \left(4+2\sqrt{6}\right)\right]\left[y - \left(4-2\sqrt{6}\right)\right]\\
&= \left[(y-4) - 2\sqrt{6}\right]\left[(y-4) + 2\sqrt{6}\right]\\
&= (y-4)^2 - (2\sqrt{6})^2\\
&= y^2 - 8y - 8.
\end{aligned}$$

Agora veja que $x = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ implica $Q(x) = x^2 - 2x - 4 - 2\sqrt{6} = 0$, que por sua vez implica $x^2 - 2x = 4+2\sqrt{6}$. Mas $4+2\sqrt{6}$ é raiz de $R(y)$, então $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é raiz de

$$R(x^2-2x) = (x^2-2x)^2 - 8(x^2-2x) - 8.$$

Com isso vemos que $R(x^2-2x) = (x^2-2x)^2-8(x^2-2x)-8$ é de quarto grau, com coeficientes inteiros e com o coeficiente do termo de maior grau igual a 1. Observe que calcular a soma dos coeficientes de $P(x) = R(x^2-2x)$ equivale a calcular $P(1) = R(1^2-2\cdot 1) = (1^2-2\cdot 1)^2 - 8(1^2-2\cdot 1) - 8 = 1+8-8 = 1$.

(**Alternativa C**)