XXI OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE SANTA CATARINA
Resolução do treinamento 3 – Nível 2

Problema 1. (OBM 2005) As letras O, B e M representam números inteiros. Se $O \times B \times M = 240$, $O \times B + M = 46$ e $O + B \times M = 64$, quanto vale $O + B + M$?

a) 19 b) 20 c) 21 d) 24 e) 36

Resolução: De $O \times B \times M = 240$ podemos dizer que:

$$O \times B = \frac{240}{M} \qquad (1)$$

e que

$$B \times M = \frac{240}{O} \qquad (2)$$

Substituindo (1) em $O \times B + M = 46$ temos:

$$\begin{aligned} O \times B + M &= 46 \\ \frac{240}{M} + M &= 46 \\ \frac{240 + M^2}{M} &= 46 \\ 240 + M^2 &= 46M \\ M^2 - 46M + 240 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação de segundo grau temos que os possíveis valores de M são $M = 6$ e $M = 40$.

Agora substituindo (2) em $O + B \times M = 64$ temos:

$$\begin{aligned} O + B \times M &= 64 \\ O + \frac{240}{O} &= 64 \\ \frac{240 + O^2}{O} &= 64 \\ 240 + O^2 &= 64O \\ O^2 - 64O + 240 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação de segundo grau temos que os possíveis valores de O são $O = 4$ e $O = 60$.

Sabendo que O, B e M são números inteiros os únicos valores possíveis para O e M são o par 4 e 6 logo:

$$\begin{gathered} O \times B \times M = 240 \\ 4 \times B \times 6 = 240 \\ 24 \times B = 240 \\ B = \frac{240}{24} \\ B = 10 \end{gathered}$$

Portanto, temos que o valor de $O + B + M$ é dado por

$$O + B + M = 4 + 10 + 6 = 20$$

(**Alternativa B**)

Problema 2. (OBM 2007) A quantidade de inteiros x com três dígitos tais que $6x$ e $7x$ possuem a mesma quantidade de dígitos é:

a) 767 b) 875 c) 876 d) 974 e) 975

Resolução: Como x é um número de três dígitos, temos a primeira relação que pode ser tirada do enunciado:

$$100 \leq x < 1000$$
$$\Rightarrow 600 \leq 6x < 6000 \text{ e } 700 \leq 7x < 7000.$$

Além disso, foi dito que ambos $6x$ e $7x$ devem possuir a mesma quantidade de dígitos. Isso pode ocorrer de duas maneiras: ambos com 3 ou ambos com 4 dígitos (pois, como concluímos acima, tanto $6x$ quanto $7x$ superam a casa dos 100, mas não são maiores que 10000).
Para que ambos possuam 3 algarismos, é suficiente que tenhamos $7x < 1000$, ou seja,

$$7x < 1000 \Rightarrow x < 142,8.$$

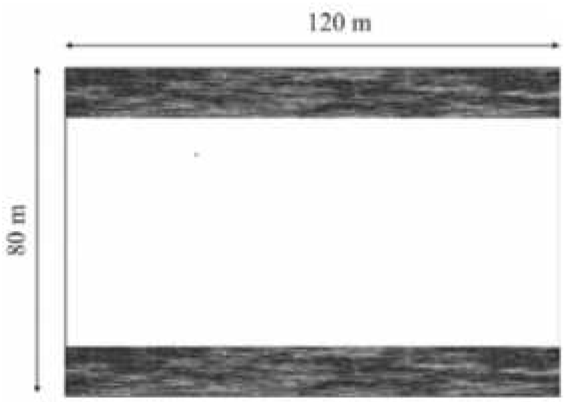
Como $100 \leq x < 142,8$, há **43** números de três dígitos como os requisitados pelo enunciado.
Agora, para que $6x$ e $7x$ possuam 4 algarismos, é suficiente que seja $6x \geq 1000$, e daí,

$$6x \geq 1000 \Rightarrow x \geq 166,6.$$

Como $166,6 \leq x < 1000$, há **833** inteiros de quatro dígitos que satisfazem o enunciado. Segue, então, que a reposta é $43 + 833 = 876$.

(**Alternativa C**)

Problema 3. (OBM 2011)O pai de Esmeralda comprou um terreno retangular de 120 metros de comprimento por 80 metros de largura. Devido a leis ambientais, ele deve plantar árvores em 20% do terreno. Ele faz isso plantando-as em duas faixas de mesma largura nas laterais do terreno, conforme mostra a figura. Qual é essa largura?



a) 6 b) 8 c) 10 d) 16 e) 24

Resolução: Primeiramente, calcularemos a área total da figura, que é um retângulo, então faremos a base (chamada de b) do retângulo multiplicada pela altura (chamada de h):

$$A = b \times h$$
$$A = 120 \times 80$$
$$A = 9600m^2$$

Agora, calcularemos 20% deste valor, que é a mesma coisa que multiplicar o valor da área total por 0,2. Então:

$$0,2 \times 9600 = 1920m^2$$

Este é o valor da área dois terrenos. Mas como essa área está dividida entre os dois terrenos, teremos a metade deste valor em cada parte. Então:

$$\frac{1920}{2} = 960$$

A figura mostra que esta área está distribuída na forma de um retângulo, de base igual a 120, e a altura é o que procuramos. Segundo a fórmula da área de um retângulo, temos que:

$$A = b \times h$$
$$960 = 120 \times h$$

Logo,

$$h = \frac{960}{120}$$
$$h = 8$$

(**Alternativa B**)

Problema 4. (OBM 2006) Num relógio digital, as horas são exibidas por meio de quatro algarismos. Por exemplo, ao mostrar 00:00 sabemos que é meia-noite e ao mostrar 23:59 sabemos que falta um minuto para meia-noite. Quantas vezes por dia os quatro algarismos mostrados são todos pares?

a) 60 b) 90 c) 105 d) 180 e) 240

Resolução: São possíveis somente 7 valores de horas: 00, 02, 04, 06, 08, 20 e 22 (todas as outras possuem algum algarismo ímpar, e vale ressaltar que a meia-noite é representada, convencionalmente, por 00:00, não por 24:00).
Para os minutos, há 15 possibilidades, a saber, 00, 02, 04,..., 44, 46 e 48 (aqui também vale ressaltar que não representamos 60 minutos, convertendo essa quantidade em uma hora cheia).
Dessa forma, como ambas as quantidades - horas e minutos - acontecem ao mesmo tempo para formar um horário, usamos o princípio multiplicativo, e temos que há $7 \times 15 = 105$ vezes em que os quatro algarismos mostrados são todos pares.

(**Alternativa C**)

Problema 5. (OBM 2011) Subtraindo um mesmo número do numerador e do denominador da fração $\frac{14}{13}$, obtemos a fração $\frac{13}{14}$. A soma dos algarismos desse número é:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

Resolução: Denotaremos x o número que será subtraído do numerador e do denominador da fração $\frac{14}{13}$, com isso obtemos:

$$\frac{14-x}{13-x} = \frac{13}{14}$$

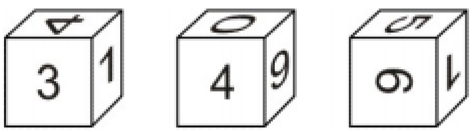
Resolvendo a equação:

$$\frac{14-x}{13-x} = \frac{13}{14}$$
$$13(13-x) = 14(14-x)$$
$$13x - 169 = 14x - 196$$
$$14x - 13x = 196 - 169$$
$$x = 27$$

Porém como queremos a soma dos algarismos de x temos $2 + 7 = 9$.

(**Alternativa E**)

Problema 6. (OBM 2011) No desenho abaixo, três cubos iguais estão apoiados sobre uma mesa. Cada cubo tem as faces numeradas por 0, 1, 3, 4, 5, 9, onde cada número aparece exatamente uma vez. Qual é a soma dos números das faces em contato com a mesa?



a) 6 b) 8 c) 9 d) 10 e) 12

Resolução: Precisamos encontrar as faces que estão viradas para baixo, e para isso analisaremos caso a caso:

- O primeiro dado possui nas faces exposta os números 4, 3 e 1. Além disso, o número na parte superior do dado é o número 4. Veja que quando o numero 4 aparece nos quadrados, os numeros 3, 1, 0 e 9 também aparecem, e portanto não podem seer seu oposto. O único número restante é o número 5. Então, a parte inferior do primeiro dado possui o número 5
- Como os dados são iguais, no caso do terceiro em que o número 5 esta em cima, sabemos que o úmero embaixo é o número 4
- No caso do segundo dados, o número acima é o 0, e os que figuram com ele são os números 4 e 9, não podendo ser seus opostos. Perceba que o numero 5 também é expulso das hipóteses por ser o oposto do 4. entao, os números possíveis são 1 e 3. mas veja que quando o numero 1 aparece, os números 3 e 9 aparecem também, ou seja, o par 1 e 3 não podem ser opostos, assim como o par 1 e 9. Portanto, o único número que pode ser par com o número 1 é o número 0. Por fim, o número abaixo do segundo dado é 1.

A soma dos números das três partes de baixo dos dados é: 5+1+4=10

(**Alternativa D**)

Problema 7. (OBM 2008) Nove números são escritos em ordem crescente. O número do meio é a média aritmética dos nove números. A média aritmética dos 5 maiores é 68 e a média aritmética dos 5 menores é 44. A soma de todos os números é:

a) 560 b) 504 c) 112 d) 56 e) 70

Resolução: Vamos chamar os tais números ordenados de $r, s, t, u, v, w, x, y, z$, com $r < s < t < u < v < w < x < y < z$. Do enunciado, temos, primeiramente, que

$$\frac{r+s+t+u+v+w+x+y+z}{9} = v \Rightarrow r+s+t+u+v+w+x+y+z = 9v. \quad (1)$$

Por segundo, sabemos que

$$\frac{v+w+x+y+z}{5} = 68 \Rightarrow v+w+x+y+z = 340. \quad (2)$$

Por fim, temos também a relação:

$$\frac{r+s+t+u+v}{5} = 44 \Rightarrow r+s+t+u+v = 220. \quad (3)$$

Somando (2) e (3), chegamos a

$$340+220 = 560 = (r+s+t+u+v+w+x+y+z)+v = 9v+v = 10v$$
$$\Rightarrow v = 56.$$

Substituindo esse valor em (1), concluímos que a soma dos números é **504**.

(**Alternativa B**)

Problema 8. (OBM 1999) O quociente de 50^{50} por 25^{25} é igual a:

a) 25^{25} b) 10^{25} c) 100^{25} d) 2^{25} e) 2×25^{25}

Resolução: Interpretando o problema queremos descobrir o valor da fração $\frac{50^{50}}{25^{25}}$, como:

$$50 = 2 \cdot 5^2$$

temos que:

$$50^{50} = (2 \cdot 5^2)^{50}$$

e podemos dizer que:

$$25^{25} = (5^2)^{25}$$

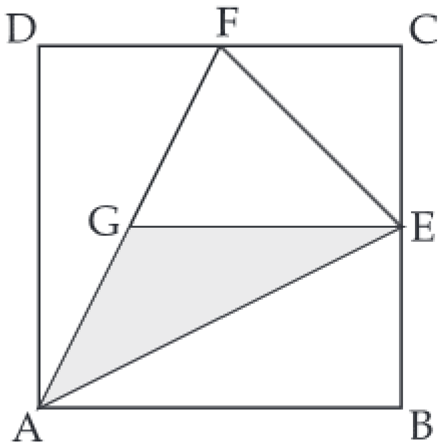
Com isso, substituindo tais resultados na fração $\frac{50^{50}}{25^{25}}$, obtemos:

$$\frac{50^{50}}{25^{25}} = \frac{(2 \cdot 5^2)^{50}}{(5^2)25} = \frac{2^{50} \cdot 5^{100}}{5^{50}} = 2^{50} \cdot 5^{50} = (2^2 \cdot 5^2)^{25} = (4 \cdot 25)^{25} = 100^{25}$$

Portanto, $\frac{50^{50}}{25^{25}} = 100^{25}$.

(**Alternativa C**)

Problema 9. (ORM 2008) O quadrado $ABCD$ tem lado igual a 1, e os pontos E e F são pontos médios dos lados BC e CD, respectivamente. O segmento EG é paralelo ao lado AB do quadrado.



(a) Calcule a área do triângulo ΔAEG.
(b) Calcule o comprimento do segmento EG.

Resolução: (a) Os triângulos ΔGFE e ΔAGE possuem a base GE em comum e, já que E é ponto médio de CB, possuem alturas iguais a $\dfrac{1}{2}$. Ressaltando que a área de um triângulo é calculada pelo produto da base e altura, segue que: $A_{\Delta AGE}$=$A_{\Delta GFE}$. Assim,

$$A_{\Delta AEG} = \frac{A_{\Delta AFE}}{2}$$

Mas

$$A_{\Delta AFE} = A_{ABCD} - A_{\Delta ADF} - A_{\Delta AEB} - A_{\Delta CEF}$$

Agora veremos induvidualmente quanto cada área vale:

- $A_{ABCD} = 1 \times 1 = 1$
- $A_{\Delta ADF} = A_{\Delta AEB} = \frac{\frac{1}{2}\times 1}{2} = \frac{1}{4}$
- $A_{\Delta ECF} = \dfrac{\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{8}$

Sabendo disso, poderemos calcular $A_{\Delta AEG}$ da seguinte forma:

$$A_{\Delta AEG} = \frac{A_{\Delta AFE}}{2} = \frac{1}{2} \times \left(1 - 2\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{16}$$

Portanto,

$$A_{\Delta AEG} = \frac{3}{16}.$$

(b) Sabemos que

$$A_{\Delta AEG} = \frac{EG \times \dfrac{1}{2}}{2}.$$

Mas pelo item anterior, $A_{\Delta AEG} = \dfrac{3}{16}$. Portanto,

$$\frac{EG \times \dfrac{1}{2}}{2} = \frac{3}{16}$$

o que implica em

$$EG = \frac{3}{4}$$

Portanto, o comprimento do segmento EG é $\frac{3}{4}$.