XXI OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA DE SANTA CATARINA
Resolução do treinamento 10 – Nível 1

Problema 1. Vemos, nas figuras 1 e 2 a seguir, exemplos de bloqueio de tela de um telefone celular que só funciona com uma senha que não é digitada, mas desenhada com segmentos de reta. Esses segmentos formam uma linha poligonal com vértices em um reticulado. Ao desenhar o padrão correspondente à senha, o dedo deve permanecer todo o tempo tocando a tela. Toda a linha poligonal corresponde a uma sequência de algarismos e essa sequência é que é, de fato, a senha. O traçado das poligonais obedece às regras a seguir:

i. O traçado começa por um dos pontos destacados, os quais correspondem aos algarismos de 1 a 9 (figura 3).

ii. Cada segmento do padrão deve ter como um dos seus extremos (aqueles em que terminamos de traçar o segmento) um ponto que ainda não foi usado.

iii. Se um segmento liga dois pontos e contem um terceiro (o seu ponto médio), então o algarismo correspondente a esse terceiro ponto é incluído na senha. Isso não acontece quando esse ponto/algarismo já foi usado.

iv. Toda senha tem pelo menos quatro algarismos

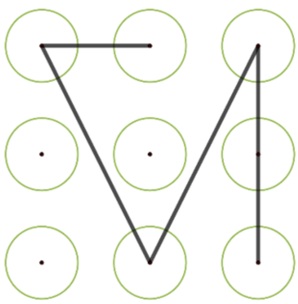


figura 1

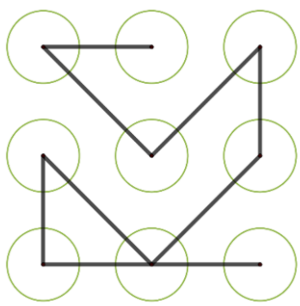


figura 2

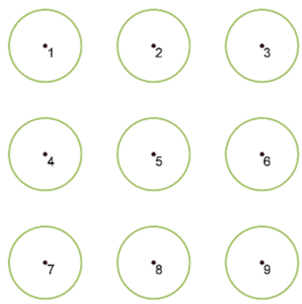


figura 3

Assim, toda linha poligonal é associada a uma sequência de quatro ou mais algarismos, os quais aparecem na senha na mesma ordem em que são visitados. Na figura 1 acima, por exemplo, a senha é 218369, caso o primeiro ponto visitado tenha sido o 2. Note que o segmento ligando os pontos associados aos algarismos 3 e 9 inclui o ponto associado ao algarismo 6. Se o primeiro ponto visitado fosse o 9, então a senha seria 963812. Se o primeiro ponto visitado fosse o 6, então a senha seria 693812. Note que o 6 seria pulado, já que não poderia repetir.

a) Por que a linha na figura 2 corresponde a uma única senha? Qual é essa senha?

b) Quantas senhas estão associadas a exatamente três lados consecutivos de um quadrado?

c) Quantas senhas diferentes de quatro algarismos possuem dois segmentos colineares (segmentos que estão na mesma reta)?

Resolução: Considerando o enunciado, temos:

a) Vemos que temos dois possíveis inícios para a nossa senha: ou começamos pelo algarismo 2, ou na 3ª linha. Na última linha, não poderíamos começar pelo algarismo 8 pois não teríamos como passar pelo 8 de novo para formar o segmento $\overline{48}$, assim como se começarmos por esse segmento, não completaríamos a senha, porque temos também o segmento $\overline{86}$, mas o 8 já teria sido usado. Começando pelo 9 então, faríamos o segmento $\overline{97}$, porém na senha, seria incluso o algarismo 8, pois esse é o ponto médio de de $\overline{97}$. Assim, não temos a possibilidade de fazer $\overline{48}$, pois o oito já foi usado na senha. Também vemos que 7 não é uma opção de início de senha pois na senha temos dois segmentos que sairiam de 7, mas só podemos traçar uma linha de cada vez. Visto que não podemos começar na 3ª, devemos começar então pelo algarismo 2, tendo assim a senha 215368479.

b) Temos 2 tipos de senhas associadas a 3 lados consecutivos de um quadrado. Umas que apresentam quadrados de lado "pequeno"e que apresentam quadrados de lado "grande". Começando pelos quadrados de lado pequeno, vemos na figura 4 que um exemplo seria a senha 1452:

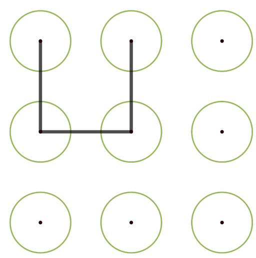


figura 4

Observe que o desenho também pode ser associado a senha 2541.

Visto que a um desenho são associadas duas senhas, resta também notar que podemos "girar"a senha até 3 vezes, obtendo até 3 novas figuras, as quais, a cada uma temos 2 senhas associadas, resultando assim em $3 \times 2 = 6$ senhas. Somando as duas senhas achadas inicialmente, totalizamos $6 + 2 = 8$ senhas com os números $1, 2, 4$ e 5.

Veja também que teremos a mesma quantidade de senhas para as quadruplas: $2, 3, 5$ e 6; $4, 5, 7$ e 8; e $5, 6, 8$ e 9. Então, para as senhas com quadrados de lados "pequenos", temos $8 \times 4 = 32$ senhas.

Considerando agora as senhas associadas a lados de quadrados "grandes", vamos ter dois tipos de quadrados. Começando pelos análogos aos da figura 5.

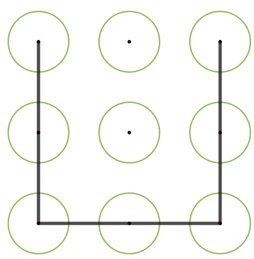


figura 5

O exemplo da figura pode ser associado a duas senhas: 1478963 e 3698741. Igual aos quadrados pequenos, podemos rotacionar o desenho até 3 vezes, tendo cada uma dessas figuras duas senhas associadas. Então temos, nesse caso, $3 \times 2 = 6$ senhas. Adicionando as senhas achadas inicialmente, totalizamos $6 + 2 = 8$ senhas desse tipo.

Observando então a figura 6, temos o resto das senhas associadas a lados de quadrados.

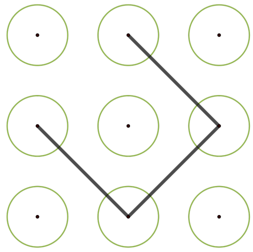


figura 6

A essa figura, temos duas senhas associadas: 2684 e 4862. Porém, como os outros casos, podemos rotacionar até 3 vezes. Vemos então que a quantidade de casos é a mesma do caso anterior, então a figuras como a figura 6, temos 8 senhas.

Somando as quantidades de senhas encontradas, temos então $32 + 8 + 8 = 48$ senhas associadas a 3 lados consecutivos de um quadrado.

c) Senhas que apresentam dois segmentos colineares são senhas como as da figura 7, aonde os segmentos colineares são os segmentos $\overline{12}$ e $\overline{23}$.

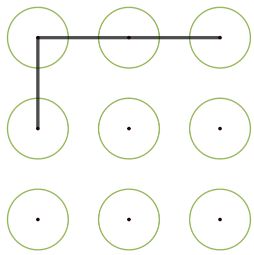


figura 7

Veja que essa figura pode representar até 3 senhas: 4123, 3214 e 2314 (nessa senha, os segmentos colineares serão $\overline{23}$ e $\overline{31}$).

Observe agora que, poderíamos escolher ao invés do algarismo 4, os algarismos 5, 8 ou 6, que teríamos, para cada um desses outro algarismos, 3 opções de senhas também. Então, considerando todos os 4 algarismos que podem ficar fora da reta que contém os dois segmentos colineares, vamos ter um total de $4 \times 3 = 12$ senhas. Mas veja também que podemos "espelhar" todas as senhas obtidas, assim como rotacioná-las até 3 vezes, então teremos um total de $12 \times 2 \times 4 = 96$ senhas.

Observe agora a figura 8:

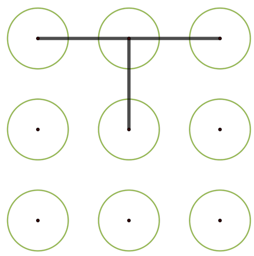


figura 8

A essa figura, temos 2 senhas associadas: 5213 e 5231. Mas veja que, no lugar do algarismo 5, podemos utilizar os algarismos $4, 7, 9$ e 6. Visto isso, teríamos então $2 \times 5 = 10$ senhas possíveis como a da figura. Porém, veja que podemos rotacionar a figura até 3 vezes, totalizando assim, $10 \times 4 = 40$ senhas diferentes associadas a figuras como a figura 8.

Tendo em consideração senhas como a da figura 9 agora, vamos ter um pensamento análogo.

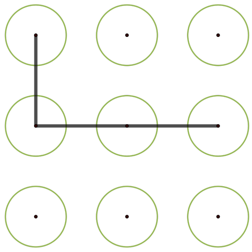


figura 9

Veja que a figura 9 representa 3 senhas: 1456, 6541 e 5641. Porém, poderíamos utilizar os algarismos $2, 3, 7, 8$ e 9 no lugar de 1 que teríamos senhas diferentes. Dessa forma, teremos então $6 \times 3 = 18$ senhas. Mas, como no caso anterior, podemos "espelhar" as senhas, assim como rotacionar (porém só podemos rotacionar 1 vez, ocupando assim a coluna 258). Então, na verdade teremos $18 \times 2 \times 2 = 72$ senhas.

Observando agora a figura 10:

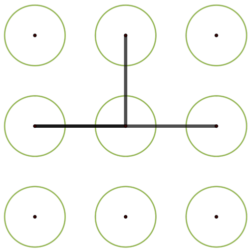


figura 10

Essa figura está associada a duas senhas: 2546 e 2564. Mas veja que poderíamos usar, ao invés do 2, os algarismos: $1, 3, 7, 8$ e 9 tendo assim, $2 \times 6 = 12$ senhas. Podemos então, rotacionar até uma vez (já consideramos os "espelhamentos"das senhas, pois se rotacionarmos as senhas com 2, por exemplo, obteremos as com 8, que já foram consideradas), totalizando então $12 \times 2 = 24$ senhas como as da figura 10.

Finalmente, levando em consideração as senhas como as da figura 11:

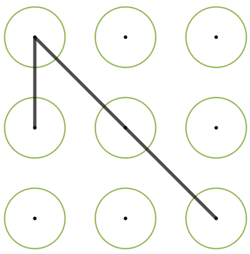


figura 11

Temos 3 senhas associadas a figura: 4159, 9514 e 5914. Porém, podemos usar no lugar do algarismo 4 os algarismos: $2, 6$ e 8, obtendo assim, $4 \times 3 = 12$ senhas. Mas, como nos outros casos, podemos rotacionar e "espelhar"as senhas (sendo que só podemos rotacionar 1 vez, para ocupar a diagonal 357), tendo assim $12 \times 2 \times 2 = 48$ senhas.

Por fim, vendo a figura 12 vamos ter o seguinte:

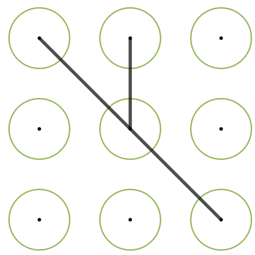


figura 12

A figura tem 2 senhas associadas: 2519 e 2591. Porém, podemos utilizar, no lugar do 2, os algarismos: $3, 4, 6, 7$ e 8. Totalizando então $6 \times 2 = 12$ senhas. Nesse caso, podemos rotacionar nossa imagem, obtendo $12 \times 2 = 24$ senhas como as da figura 12. (Não podemos "espelhar"a figura, pois tomando as figuras que possuem o algarismo 2, por exemplo, e espelharmos elas, vamos obter as senhas com 6, que, no caso, já foram consideradas).

Somando então todas as quantidades de senhas obtidas, teremos então $96 + 40 + 72 + 24 + 48 + 24 = 268$ senhas associadas a dois segmentos colineares.

Problema 2. Na Terra dos Impas, somente os algarismos ímpares são utilizados para contar e escrever números. Assim, em vez dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ... os Impas tem os números correspondentes 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 31, 33, ... (note que os números dos Impas têm somente algarismos ímpares). Por exemplo, se uma criança tem 11 anos, os Impas diriam que ela tem 31 anos.

a) Como os Impas escrevem o nosso numero 20?

b) Numa escola desse lugar, a professora escreveu no quadro-negro a continha de multiplicar 13×5. Se você fosse um aluno Impa, o que escreveria como resultado?

c) Escreva, na linguagem dos Impas, o número que na nossa representação decimal é escrito como 2017.

Resolução: Com base nas informações dadas no enunciado, iremos resolver os itens propostos acima:

a) A forma mais simples de resolvermos o item (a) é listar os 20 primeiros números dos Impas em ordem crescente, tendo assim: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 31, 33, 35, 37, 39, 51, 53, 55, 57 e 59. Portanto, os Impas escrevem o nosso número 20 como 59.

b) Para o item (b), levando em consideração que a conta que estava no quadro-negro estava na forma do Impas de escrever, vamos começar "traduzindo" esta conta para a nossa forma em base decimal para calcularmos. Pela listagem que fizemos no item (a), temos que o 13 e 5 dos Impas representam, respectivamente, o 7 e 3 da nossa base decimal. Assim, o resultado da conta seria 21, pois $7 \times 3 = 21$. Agora, vamos "traduzir" novamente para a representação dos Impas. Tomando a lista do item (a), temos que o numero vinte é representado por 59 para os Impas, então o número 21 será representado por 71, que é o sucessor do 59 na sequência de números onde só algarismos ímpares são aceitos.

c) Para o item (c), escrever uma lista não é uma opção viável, pois demandaria um tempo absurdo para tal.Sendo assim, teremos que entender a lógica por trás desse método de contagem. Primeiramente, vamos separar todos os números dos Impas em classes. Tome como a característica que define uma classe a quantidade de algarismos que forma o número. Vamos observar abaixo as possíveis classes:

- Classe dos números formados por um único algarismo: teremos 5 números diferentes (1, 3, 5, 7 e 9), e a quantidade de números por classe pode ser determinada por um arranjo com repetição. Na primeira classe temos um arranjo de 5 elementos (os 5 algarismos ímpares) tomados 1 a 1 (quantidade de algarismos dos números da classe).
- Classe dos números formados por dois algarismos: teremos 25 números diferentes, ou seja, um arranjo com repetição de 5 elementos (os 5 algarismos ímpares) tomados 2 a 2 (quantidade de algarismos dos números da classe), $5 \times 5 = 25$.
- Classe dos números formados por 3 algarismos: teremos 125 números diferentes, e portanto um arranjo com repetição de 5 elementos (os 5 algarismos ímpares) tomados 3 a 3 (quantidade de algarismos dos números da classe), $5 \times 5 \times 5 = 125$.

- Classe dos números formados por 4 algarismos: teremos 625 números diferentes, logo um arranjo com repetição de 5 elementos (os 5 algarismos ímpares) tomados 4 a 4 (quantidade de algarismos dos números da classe), $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$.
- Classe dos números formados por 5 algarismos: teremos 3125 números diferentes, que é o mesmo que um arranjo com repetição de 5 elementos (os 5 algarismos ímpares) tomados 5 a 5 (quantidade de algarismos dos números da classe), $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 3125$.

Tomando todos os números de Impas em ordem crescente, teremos que estas classes têm uma ordem crescente de seus elementos, assim como uma ordem entre si, ou seja, um número de 3 algarismos nunca virá antes de um de 2 algarismos, por exemplo. Assim, podemos usar este sistema de ordem para descobrir qual número dos Impas representará o nosso 2017, isto é, o 2017º número em ordem crescente dos números dos Impas.

Do 1º ao 5º número da ordem crescente dos Impas temos os números pertencentes à primeira classe, do 6º ao 30º temos os pertencentes à segunda classe (números de dois algarismos), do 31º ao 155º temos os pertencentes à terceira classe (números de três algarismos), do 156º ao 780º temos os pertencentes à quarta classe (números de quatro algarismos) e do 781º ao 3905º temos os pertencentes à quinta classe (números de cinco algarismos). Sendo assim, o 2017º número Impa da sequência tem 5 algarismos, agora precisamos descobrir qual será este número. Para isto, vamos abrir o problema em forma de árvore (para facilitar o entendimento da resolução a seguir, inserimos um diagrama da mesma no final da resolução).

Sabemos que o 781º número Impa da sequência será o 11111, pois é o menor número de Impa de 5 algarismos e o 3905º número Impa da sequência será o 99999, pois é o maior número Impa de 5 algarismos. Dentre esses 3125 números Impas de 5 algarismos 625 começarão com o algarismo 1, outros 625 com o algarismo 3, outros 625 com o algarismo 5, outros 625 com o algarismo 7 e os 625 restantes com o algarismo 9.

Descobriremos a seguir cada algarismo do número Impa que representa o nosso número 2017:

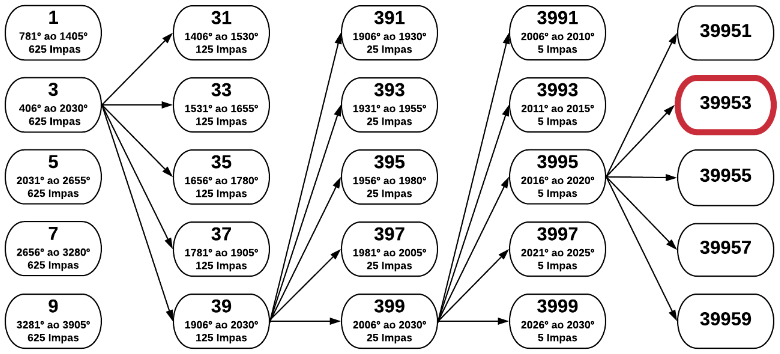
- 1º algarismo: Analisando as posições dos números, teremos que do 781º ao 1405º número Impa, e também que todos os números Impas de 5 algarismos que começam com o algarismo 1, do 1406º ao 2030º número Impa, teremos todos os números Impas de 5 algarismos que começam com o algarismo 3. Note que o 2017º estará neste intervalo, então já sabemos que o 2017º Impa tem 5 algarismos e começa com o algarismo 3.

  Dessa forma, do 1406º ao 2030º número Impa, os 125 primeiros tem como segundo algarismo o número 1, ou seja, do 1406º ao 1530º temos todos os Impas de 5 algarismos que começam com 31.
- 2º algarismo: Seguindo a mesma lógica, do 1531º ao 1655º temos todos os Impas de 5 algarismos que começam com 33, do 1656º ao 1780º temos todos os Impas de 5 algarismos que começam com 35, do 1781º ao 1905º temos todos os Impas de 5 algarismos que começam com 37 e do 1906º ao 2030º temos todos os Impas de 5 algarismos que começam com 39. Como o 2017º Impa está neste intervalo, já temos que ele começa com os algarismos 3 e 9, respectivamente.
- 3º algarismo: Continuando o raciocínio, do 1906º ao 2030º, os 25 primeiros têm como o terceiro algarismo da esquerda para a direita o algarismo 1, ou seja, do 1906º ao 1930º temos todos os Impas de 5 algarismos que começam com 391, do 1931º ao 2055º temos todos os Impas de 5 algarismos que começam com 393, do 1956º ao 2080º temos todos os Impas de 5 algarismos que começam com 395, do 1981º ao 2005º temos todos os Impas de 5 algarismos que começam com 397 e do 2006º ao 2030º temos todos os Impas de 5 algarismos que começam com 399. Como o 2017º Impa está neste último intervalo, sabemos que ele deve começar com os algarismos 3, 9 e 9.

  Faltam apenas os dois últimos, então novamente vamos separar o intervalo do 2006º ao 2030º em outros 5 intervalos, nos quais cada intervalo corresponde ao quarto algarismo da esquerda para a direita.
- 4º algarismo: Do 2006º ao 2010º temos todos os Impas de 5 algarismos que começam com 3991, do 2011º ao 2015º temos todos os Impas de 5 algarismos que começam com 3993, e do 2016º ao 2020º temos todos os Impas de 5 algarismos que começam com 3995. Note que o 2017º Impa está neste intervalo, logo o 2017º Impa começa com os algarismos 3, 9, 9 e 5.
- 5º algarismo: Vamos finalmente descobrir o último algarismo. Observe que neste último intervalo só haviam 5 números Impas, do 2016º ao 2020º. Assim, temos que esses Impas em ordem crescente serão:

  - 39951 (2016º Impa);
  - 39953 (2017º Impa);
  - 39955 (2018º Impa);
  - 39957 (2019º Impa);
  - 39959 (2020º Impa).

Logo, o Impa que está na posição 2017º, que representa o nosso número 2017 em sua forma decimal, é o Impa 39953. Podemos ver abaixo o diagrama citado anteriormente que representa o que acabamos de fazer.



Problema 3. Alguns retângulos podem ser divididos em um quadrado e quatro retângulos menores iguais, de modo que todas essas cinco partes podem ser reunidas para compor um novo quadrado.

a) Faça um desenho mostrando como um quadrado e quatro retângulos iguais podem ser reunidos para formar um novo quadrado.

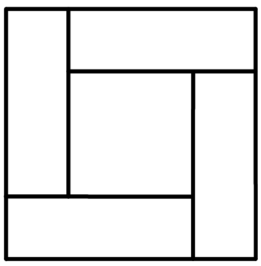
b) Mostre um retângulo que pode ser dividido de acordo com a exigência do enunciado e indique as medidas dos seus lados.

c) Se o perímetro do seu retângulo é de 780 cm, quais podem ser os valores do perímetro do quadrado formado depois da nova arrumação das partes?

Resolução: Observando o enunciado temos:

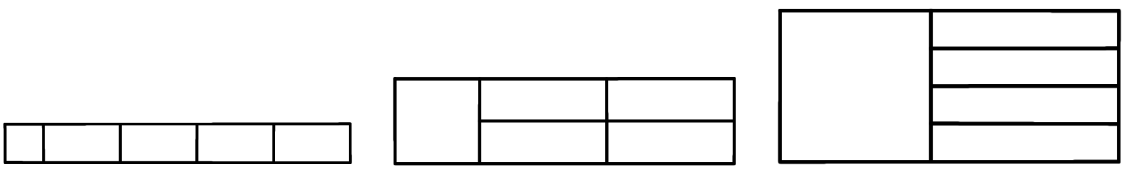
a) Note como no item (a) não é exigido que os retângulos congruentes e o quadrado que usaremos para formar um novo quadrado provenham da partição de um outro retângulo, dado esta informação vamos apenas nos concentrar em formar um quadrado usando um quadrado e mais 4 retângulos congruentes, sem nos preocuparmos com as origens destes.

   Um modo de formar um quadrado é contornar o quadrado inicial com os quatro retângulos como na imagem abaixo:



b) Observe que, se chamarmos de x a medida do lado do quadrado no interior do quadrado maior e chamarmos de y a medida do lado menor dos retângulos, teremos as seguintes dimensões: a medida do lado maior dos retângulos será $x + y$ e a medida do lado do quadrado maior será $x + 2y$.

   Assim, um modo montar o retângulo usando os 4 retângulos exteriores congruentes e um quadrado com as dimensões citadas acima é montar uma fila de retângulos que tenha a mesma altura x do quadrado menor:



Assim temos, da esquerda para a direita, que $x = y$ ou $x = 2y$ ou $x = 4y$. Logo as dimensões dos retângulos que montamos acima para cada valor de y da esquerda para a direita são:

- medida da base: $x+4\times(x+y) = x+4\times(x+x) = x+4\times 2x = x+8x = 9x$, dimensões do retângulo: x por $9x$.
- medida da base: $x+2\times(x+y) = x+2\times(x+\frac{x}{2}) = x+2\times\frac{2x+x}{2} = x+2\times\frac{3x}{2} = x+3x = 4x$, dimensões do retângulo: x por $4x$.
- medida da base: $x+(x+y) = x+x+\frac{x}{4} = \frac{4x+4x+x}{4} = \frac{9x}{4}$, dimensões do retângulo: x por $\frac{9x}{4}$.

c) Note que as medidas dos perímetros do retângulos do item (b) da esquerda para a direita serão:

- $x+x+9x+9x = 20x$
- $x+x+4x+4x = 10x$
- $x+x+\frac{9x}{4}+\frac{9x}{4} = 2x+\frac{9x+9x}{4} = \frac{8x+9x+9x}{4} = \frac{26x}{4}$

Logo, se igualarmos 780 cm às medidas que obtemos dos perímetros dos retângulos, teremos uma equação para calcular quanto vale x, em centímetros, em cada um dos 3 casos:

- $780 = 20x$: $780\div 20 = 39$, logo x vale 39 cm, como no primeiro caso temos que $x = y$, logo $y = 39$ cm, e como vimos no início da resolução do item (b), a medida do lado do quadrado formado pelas partições do retângulo é $x+2y$, logo o perímetro do mesmo será $4\times(x+2y) = 4x+8y$, assim a medida do perímetro do quadrado formado no primeiro caso será: $4\times 39+8\times 39 = 468$ cm.
- $780 = 10x$: $780\div 10 = 78$, então x vale 78 cm, e como no segundo caso temos $y = \frac{x}{2}$, logo $y = 39$ cm, logo o perímetro do quadrado formado pelas partições do retângulo no segundo caso é $4\times 78+8\times 39 = 624$ cm.
- $780 = \frac{26x}{4}$: $780\div\frac{26}{4} = 780\div 6,5 = 120$, logo x vale 120 cm, e como no segundo caso temos $y = \frac{x}{4}$, logo $y = 30$ cm, logo o perímetro do quadrado formado pelas partições do retângulo no terceiro caso é $4\times 120+8\times 30 = 720$ cm.

Problema 4. Em corridas de carros, é comum mostrar a posição dos pilotos em cada uma das voltas da corrida, relativamente à ordem de largada. Para isso, são usados os símbolos -0 para indicar que a posição é a mesma da largada, $\bigwedge$ ao lado de um número indicando quantas posições ele subiu em relação à largada e $\bigvee$ ao lado de um número indicando quantas posições ele caiu em relação à largada. Além disso, utiliza-se uma abreviação dos nomes dos pilotos. Na volta 17 de uma corrida de 25 voltas, a posição dos dez primeiros colocados era a seguinte:

Volta 17/25		
Posição	Piloto	
1	PRE	-0
2	SAP	$\wedge 2$
3	BET	$\wedge 3$
4	ICO	$\vee 1$
5	ROI	$\vee 3$
6	FRE	$\vee 1$
7	LEM	-0
8	ARE	$\wedge 2$
9	DON	$\wedge 7$
10	JEZ	$\vee 2$

a) Escreva os nomes abreviados dos cinco primeiros colocados na largada da corrida e suas respectivas posições.

b) A partir da volta 17 e até o fim da corrida, os três primeiros colocados conseguem manter seus tempos de duração de cada volta: PRE faz cada volta em 2min01s, SAP faz cada volta em 1min59s e BET faz cada volta em 1min58s. No fim da volta 17, SAP estava 15s atrás de PRE e BET estava 18s atrás de PRE. Considerando que esse três pilotos formaram o pódio e que o piloto mais rápido sempre conseguiu ultrapassar um piloto mais lento em sua frente, explique quem ganhou a corrida e quais pilotos ocuparam o segundo e terceiro lugares.

Resolução: a) Sabemos que o símbolo $\bigwedge$ significa que o piloto subiu de posição, e o número que vier ao lado mostra quantas posições foram.

Analisando a tabela, vemos que SAP subiu 2 posições em relação à largada, então temos que subtrair 2 colocações da posição atual. Já que ele está em 2º lugar agora, largou em 4º lugar. Para o símbolo $\bigvee$ aplicamos o raciocínio inverso, ou seja, durante a corrida ele caiu em posições, então largou posições acima da que se encontra atualmente. Veja na tabela que ICO caiu 1 posição desde a largada, ou seja, se agora está em 4, largou em 3. O mesmo aconteceu com o FRE, que se encontra no 6º lugar depois de ter caído 1 posição. Como PRE não subiu nem caiu de posição, ele já estava em 1º lugar desde o início da corrida.

Agora aplicando este raciocínio para todos os competidores obtemos:

Posição	Piloto
1	PRE
2	ROI
3	ICO
4	SAP
5	FRE

b) Veja que na volta 17 SAP está 15s atrás de PRE, enquanto BET está 18s atrás de PRE.

Na tabela abaixo temos o corredor e o tempo em minutos que o mesmo demora para dar uma volta.

Piloto	Tempo para dar uma volta
PRE	2min1s
SAP	1min59s
BET	1min58s

Primeiro vamos transformar tudo para segundos. Sabemos que 1 minuto tem 60 segundos, então 2 minutos têm 120. Aplicando isso para o tempo dos corredores, temos:

- PRE: 2min1s, ou seja, multiplicamos os minutos $2 \times 60 = 120$ e posteriormente somamos os segundos $120 + 1 = 121$ segundos.
- SAP: 1min59s, ou seja, multiplicamos os minutos $1 \times 60 = 60$ e posteriormente somamos os segundos $60 + 59 = 119$ segundos.
- BET: 1min58s, ou seja, multiplicamos os minutos $1 \times 60 = 60$ e posteriormente somamos os segundos $60 + 58 = 118$ segundos.

Então, temos uma nova tabela com o tempo de cada corredor para dar uma volta totalmente em segundos.

Piloto	Tempo para dar uma volta
PRE	121s
SAP	119s
BET	118s

Veja que a cada volta SAP se aproxima 2s e BET 3s do tempo de volta de PRE.

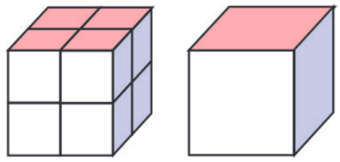
Se estamos na volta 17 e o total de volta é 25, temos $25 - 17 = 8$ voltas para acabar a corrida.

Como SAP se aproxima 2s em cada volta e são 8 voltas, ele se aproximará 2s $\times 8 = 16$s, como estava 15 atrás e se aproximou 16s, ficará 1 na frente de PRE.

Já BET se aproxima 3s em cada volta e são 8 voltas, ele se aproximará 3s $\times 8 = 24$s, como estava 18 atrás de PRE e se aproximou 24s, ficará 6 na frente de PRE.

Dessa forma, BET ganha a corrida, pois ainda estará 5s na frente de SAP, que ficará em segundo lugar e PRE em terceiro.

Problema 5. Jacira tem muitos cubinhos cujos lados medem 1 cm, 2 cm e 3 cm. Assim, por exemplo, ela tem duas maneiras diferentes de obter um cubo cujo volume é 8 cm^3: uma delas é montar um cubo com 8 cubinhos de 1 cm de lado e a outra é simplesmente pegar um cubo com 2 cm de lado, como mostrado na figura abaixo. Note que 2 cubos de mesmo volume são obtidos de maneira diferente se, e somente se, são montados com números diferentes de cubos.



a) De quantas maneiras diferentes ela pode obter um cubo com volume de 27 cm^3?

b) De quantas maneiras diferentes ela pode obter um cubo com volume de 64 cm^3?

Resolução: Com base no enunciado, vamos resolver os itens propostos:

a) Primeiramente, vamos lembrar que o volume de um cubo de lado l é igual à l^3. Como o cubo tem volume igual à 27 cm^3, precisamos de uma medida que elevada ao cubo resulte 27. Este é o 3, pois $3^3 = 27$. Portanto, podemos concluir que o lado do cubo desejado é 3 cm.
Agora, precisamos ver de quantas maneiras podemos construí-lo com os cubinhos de lados 1 cm, 2 cm e 3 cm. Note que, se utilizarmos um cubinho de lado 3 cm, não temos mais como utilizar outro, pois ele por si só já é o desejado, e portanto só há uma maneira de obter o cubo desejado utilizando um cubinho de lado 3 cm.
Se quisermos utilizar um cubinho de lado 2 cm, ocuparemos 8 cm^3 do cubo de 27 cm^3, e sobrarão 19 cm^3 $(27 - 8 = 19)$, que só poderão ser ocupados por cubinhos de lado 1 cm, pois caso utilizássemos um outro cubinho de lado 2 cm já teríamos um lado com medida 4 (pois estaríamos com dois cubinhos de lado 2 cm). Assim, se utilizarmos um cubinho de lado 2 cm, o resto será preenchido por cubinhos de lado 1 cm.
Outra maneira ainda de obter o cubinho de lado 3 cm é utilizando somente cubinhos de 1 cm de lado, montando o cubo com três cubinhos de lado 1 cm de medida em cada dimensão, totalizando 27 cubinhos de 1 cm^3 de volume.
Portanto, existem 3 maneiras distintas de obter o cubo de lado 3 utilizando cubinhos de lados 1 cm, 2 cm ou 3 cm.

b) Como queremos um cubo de volume 64 cm^3, temos que sua aresta mede 4 cm, pois $4^3 = 64$. Caso utilizemos um cubinho de lado 3 cm, não conseguiremos utilizar outro de 3 cm, pois a soma de suas laterais ultrapassa 4 cm.
Ainda no caso em que utilizamos o cubinho de aresta 3 cm, não podemos usar o cubinho de aresta 2 cm, pois assim a soma de seus lados ultrapassaria 4 cm. Assim, se utilizarmos um cubinho de aresta 3 cm, deveremos usar apenas cubinhos de aresta 1 cm para completar o cubo de aresta 4 cm, que desejamos.
Outra forma de montar o cubo de aresta 4 cm é utilizando 8 cubinhos de aresta 2 cm. É possível pois se colocarmos dois cubinhos, um do lado do outro, a soma de suas arestas é exatamente 4 cm, como queremos, e ainda, o cubinho de aresta 2 cm tem volume igual à 8 cm^3, pois $2^3 = 8$, e se utilizarmos 8 destes cubinhos, teremos um volume total de 8×8 cm^3 $= 64$ cm^3. Podemos ainda substituir cada um destes cubinhos de aresta 2 cm por 8 cubinhos de aresta 1 cm. Ainda, podemos montar o cubo de aresta 4 cm utilizando 64 cubinhos de aresta 1 cm. Assim, temos como opções:

- 1 cubo de aresta 3 cm e 37 cubos de aresta 1 cm;
- 8 cubos de aresta 2 cm;
- 7 cubos de aresta 2 cm e 8 cubos de aresta 1 cm;
- 6 cubos de aresta 2 cm e 16 cubos de aresta 1 cm;
- 5 cubos de aresta 2 cm e 24 cubos de aresta 1 cm;
- 4 cubos de aresta 2 cm e 32 cubos de aresta 1 cm;
- 3 cubos de aresta 2 cm e 40 cubos de aresta 1 cm;
- 2 cubos de aresta 2 cm e 48 cubos de aresta 1 cm;
- 1 cubos de aresta 2 cm e 56 cubos de aresta 1 cm;
- 64 cubos de aresta 1 cm.

Logo, temos 10 modos diferentes de se obter um cubo de 64 cm^3 usando cubinhos de aresta 1 cm, 2 cm ou 3 cm.