Gabarito 7 – 2 ª fase de 2012
Nível 2

1. Os triângulos ABE e EHF são retângulos em A e H, respectivamente; a medida do ângulo $B\widehat{E}F$ é de 90°; se a medida do ângulo $H\widehat{E}F$ é x, então a medida dos ângulos$E\widehat{F}H$ e $A\widehat{E}B$ é $90° - x$ e, conseqüentemente, a medida do ângulo $A\widehat{B}E$ é x; como $BE = EF$ (são lados do mesmo quadrado), então os triângulos mencionados são congruentes (caso ALA). Como o quadrado $ABCD$ tem área igual a $30cm^2$, concluímos que seus lados medem $\sqrt{30}$cm; o quadrado $FHIJ$ tem área igual a $20cm^2$, logo seus lados medem $\sqrt{20}$cm.Logo o seguimento AE mede $\sqrt{20}$cm,vamos então calcular a hipotenusa do triângulo ABE, que é o lado do quadrado $BEFG$. Por Pitágoras temos que: $BE^2 = (\sqrt{20})^2 + (\sqrt{30})^2$. Logo $BE^2 = 50$. Note que BE^2 é igual à área do quadrado $BEFG$, ou seja a área de $BEFG = 50cm^2$

2. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}=\frac{60}{120}+\frac{40}{120}+\frac{30}{120}+\frac{20}{120}+\frac{15}{120}+\frac{12}{120}+\frac{10}{120}$

   Devemos escrever 120 como soma de algumas parcelas 60, 40, 30, 20, 15, 12, 10. As soluções possíveis são $60 + 40 + 20 = 120$ e $60 + 30 + 20 + 10 = 120$. Assim, podemos remover $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}$ e $\frac{1}{12}$ ou $\frac{1}{3}, \frac{1}{8}$ e $\frac{1}{10}$. Evidentemente 15 e 12 não podem aparecer, pois a soma não seria múltipla de 10 nesse caso.

3. O número máximo de vezes que retiramos cartões da caixa é 15, que corresponde à sequência de cartões retirados 7, 6, 5, 4, 3, 7, 6, 5, 4, 7, 6, 5, 7, 6 7. De fato, dentre os primeiros 5 cartões há necessariamente um que é menor que o cartão seguinte, e que, portanto, não voltará mais para a caixa, o mesmo acontecendo para pelo menos um cartão dentre os 4 seguintes; depois, para pelo menos um dentre os 3 seguintes; depois, para pelo menos um dentre os dois seguintes, sobrando no máximo um cartão, que será o último a ser retirado da caixa.

4. Olhando para o último número da fila n, vemos que ele é a soma de todos os números de 1 a n: por exemplo, na fila 4, o último número da fila é $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Note que para obter a quantidade de números até uma certa fila, basta somar o número da fila ao total de números que havia antes dessa fila. Assim, temos, fila 5 : 15, fila 6: 21, fila 7: 28, fila 8: 36, fila 9: 45, fila 10: 55, fila 11: 66, fila 12: 78, fila 13: 91, fila 14: 105. O número de fitas adesivas horizontais entre uma fila $n - 1$ e uma fila n é igual a $n - 1$ e o número de fitas adesivas verticais numa fila n é igual $n - 1$. Portanto, até a fila número 14, o número de fitas é $(1 + 2 + ... + 13) + (1 + 2 + ... + 13) = 2 \cdot \frac{13 \cdot 14}{2} = 182$.

5. Para chegar ao 6ºdegrau podemos escolher entre:

   - seis passos de 1;
   - quatro passos de 1 e um de 2;
   - dois passos de 1 e dois de 2;
   - três passos de 2.

   Mas devemos observar que, além dos tipos de passos descritos acima, a ordem dos passos dados é relevante. Por exemplo, ir ao sexto degrau fazendo $1 + 1 + 2 + 2$ é diferente de fazer $2 + 1 + 2 + 1$; assim temos que contar as ordens que cada tipo determina.

   Com seis passos de 1 só existe uma ordem possível.

   Com quatro passos de 1 e um de 2 esxistem 5 ordens possíveis $(2 + 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 2 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 2 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 2 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 2)$.

   Com dois passos de 1 e dois de 2 existem seis modos possíveis $(2 + 2 + 1 + 1, 2 + 1 + 2 + 1, 2 + 1 + 1 + 2, 1 + 2 + 2 + 1, 1 + 2 + 1 + 2$ e $1 + 1 + 2 + 2)$.

   Com três passos de 2 só existe um modo.

   Assim sendo, existem treze modos de alcançar o degrau de número 6.

   Para contar de quantos modos podemos ir do degrau 6 ao 10 procedemos de modo análogo, o que nos dá:

   - com quatro passos de 1 só existe um modo

- com dois passos de 1 e um de 2 existem três modos (1+1+2, 1+2+1 e 2+1+1).
- com dois passos de 2 só existe um modo.

Desta forma existem cinco modos de ir do degrau 6 ao 10.

O número de maneiras de ir do início da escada ao degrau 10 é então $13 \cdot 5 = 65$, pois para cada uma das treze maneiras de chegarmos ao degrau 6 podemos escolher cinco maneiras de chegarmos ao topo da escada.

6. Para que a diferença seja a menor possível, os números devem ser os mais próximos possíveis. Assim, os algarismos das centenas devem ser consecutivos. A melhor escolha é aquela em que as dezenas formadas pelos algarismos restantes tenham a maior diferença possível, o que ocorre para as dezenas 65 e 12. Assim, os algarismos das centenas devem ser 3 e 4. O menor número começado por 4 é 412 e o maior começado por 3 é 365, cuja diferença é 47.

7. $(ab+1)|(a+1)(b+1) \Rightarrow (ab+1)|ab+a+b+1 \Rightarrow (ab+1)|(ab+a+b+1)-(ab+1) \Rightarrow (ab+1)|(a+b) \Rightarrow (ab+1) \leq (a+b) \Rightarrow a(b-1) \leq (b-1)$. Desta última desigualdade, observamos que, se $b > 1$, então $a \leq 1 \Rightarrow a = 1$, ou seja, um dentre os inteiros a e b vale 1. Suponha, então, sem perda de generalidade, que a = 1. Substituindo, obtemos $a = 1 \Rightarrow (b+1)|2(b+1)$, o que é válido para todo inteiro positivo b. As soluções são, então, $(1, b)$ e $(a, 1)$.