UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
XV OLIMPÍADA REGIONAL DE MATEMÁTICA
PET – MATEMÁTICA

Gabarito 2 – 1 ª fase de 2012
Nível 2

1. **(Alternativa E)**. Seja x o número de alunos da classe e $x = 4n+2$ (par). $x = 5k+1$ e temos também que $15 < x \leq 29$, e dentre os pares deste intervalo somente 26 é da forma $4n+2$ e $5k+1$, logo $26 = x$ e $26 - 15 = 11$ que é o número de meninos.

2. **(Alternativa C)** Inicialmente, sejam x o lado da folha e y o lado do quadrado menor de lado maior que $1cm$. Como os demais 41 quadrados têm lado $1cm$, x e y são inteiros positivos. Assim:

$$x^2 = y^2 + 41.1 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 41 \Leftrightarrow x - y = 1 \text{ e } x + y = 41 \Leftrightarrow x = 21 \text{ e } y = 20$$

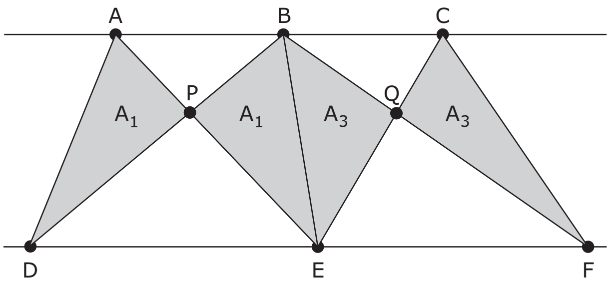
Portanto o lado da folha mede $21cm$.

3. **(Alternativa D)** Note que $15 = 3 \times 5$. Assim, o número de fatores primos do número deve ser no máximo 2. Sejam p, q tais números primos, então para que o número de divisores inteiros e positivos seja exatamente 15, os números precisam ser da seguinte forma: p^{14} e $p^2 \cdot q^4$. Repare que $2^{14} > 500$
Assim teremos as seguintes possibilidades:

$$2^2 \cdot 3^4 = 324,\ 3^2 \cdot 2^4 = 144 \text{ e } 5^2 \cdot 2^4 = 400$$

4. **(Alternativa E)** Temos que $10x + 25y = 1000$, onde x e y são, respectivamente, as quantidade de moedas de 10 centavos e de 25 centavos. Para que x seja um valor inteiro positivo basta que y seja qualquer número par entre 2 e 38. Logo, temos 19 maneiras diferentes.

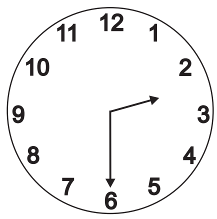
5. **(Alternativa B)**



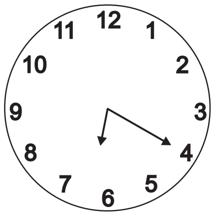
Seja P o ponto de interseção dos segmentos DB e AE; e Q o ponto de interseção de CE e BF. Note que os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle BDE$ possuem a mesma altura e a mesma base, logo possuem a mesma área. O mesmo ocorre com os triângulos $\triangle BEF$ e $\triangle CEF$. Retirando as áreas comuns PDE e QEF, temos que [ADP]=[PBE] e [BEQ]=[QCF]. Logo, $A_2 = A_1 + A_3$.
Observação: [XYZ] denota a área do triângulo XYZ.

6. **(Alternativa E)** Para medir o ângulo entre os ponteiros, basta obter as posições dos dois ponteiros. Fazendo isso para cada um dos horários, lembrando que o ângulo entre dois números consecutivos do relógio é 30º:

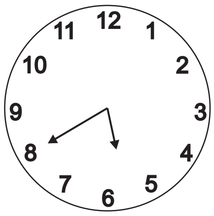
- 02h30: o ponteiro maior está sobre o 6 e o menor está exatamente na metade entre o 2 e o 3.
  Logo o ângulo entre eles será $3,5 \times 30° = 105°$.



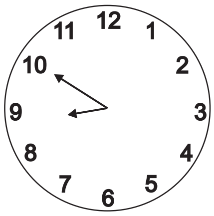
- 06h20: o ponteiro maior está sobre o 4 e o menor está $\dfrac{1}{3}$ de hora depois do 6.
  Logo o ângulo é $\left(2 + \frac{1}{3}\right) \times 30° = 70°$.



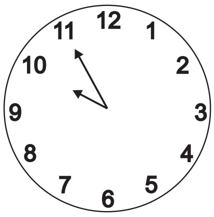
- 05h40: o ponteiro maior está sobre o 8 e o menor está $\frac{1}{3}$de hora antes do 6. Logo o ângulo entre eles será $\left(2+\frac{1}{3}\right)\times 30^\circ = 70^\circ$.



- 08h50: o ponteiro maior está sobre o 10 e o menor está $\frac{1}{6}$ de hora antes do 9. Logo o ângulo é $\left(1+\frac{1}{6}\right)\times 30^\circ = 35^\circ$



- 09h55: o ponteiro maior está sobre o 11 e o menor está $\frac{1}{12}$ de hora antes do 10. Logo o ângulo é $\left(1+\frac{1}{12}\right)\times 30^\circ = 32,5^\circ$



7. **(Alternativa C)** Sejam a, b, c os quatro números primos tais que : $a+b=76$ e $c+d=84$. Efetuando as diferenças:

$$107-76=31$$
$$107-84=23$$
$$149-76=73$$
$$149-84=65$$

Notamos que, na última, obtemos um número não primo (65). Isto significa que c e d não são parcelas, ambos, da soma 149. Mas, então, a e b necessariamente são parcelas daquela soma. Portanto o número primo 73 é uma das parcelas da soma 84. Seja $c=73$. Então $d=84-73=11$. Falta encontrar a e b. Observando a primeira diferença acima notamos que 31 não é nem c nem d. Isto significa que a e b não são ambas parcelas da soma 107. Mas então c e d necessariamente são parcelas daquela soma. Ora, da segunda diferença obtemos 23 que faz parte da soma 76. Seja $a=23$. Então $b=76-23=53$. Os números são: $a=23$, $b=53$, $c=73$ e $d=11$.