Gabarito 8 – 2ª fase de 2012
Nível 1

1. Há $9 \times 9 \times 9 = 729$ números de três algarismos não nulos. Destes, $9 \times 8 \times 7 = 504$ tem os três algarismos distintos. Portanto, há $729 - 504 = 225$ números com pelo menos dois algarismos iguais.

2. Por simetria, os triângulos APS e DRQ são congruentes, assim como os triângulos SCR e QBP. Assim, os lados do retângulo $ABDC$ são $AS + SC = 4 + 6 = 10cm$ e $CR + RD = CR + AP = 8 + 3 = 11cm$. Deste modo, a área do retângulo $PQRS$ é obtida subtraindo as áreas dos triângulos APS, DRQ, SCR e QBP da área do retângulo $ABDC$, ou seja, é $10 \times 11 - 2 \times \dfrac{3 \times 4}{2} - 2 \times \dfrac{6 \times 8}{2} = 50cm^2$.

3. (a) Os divisores positivos de 9 menores que 9 são 1 e 3, logo o selo do número 9 é o par $(2; 4)$.
   (b) Observe que todo número inteiro positivo tem 1 como divisor. Como o número que estamos procurando tem apenas dois divisores menores que ele, 1 terá que ser um desses divisores e como a soma dos dois divisores é 3, então o outro divisor deve ser 2. Como não há outros divisores, então o número que procuramos é uma potência de 2, e para ter apenas dois divisores menores que ele próprio, então o número deve ser 4.
   (c) Seja n um número com selo $(6; m)$. n possui 7 divisores contando com ele próprio. Observe que, para obtermos a quantidade de divisores de um número qualquer devemos tomar os expoentes de cada fator primo, que aparece na decomposição em fatores primos do número, adicionamos uma unidade a cada um deles, e depois multiplicamos. Por exemplo, o número $72 = 2^3 \times 3^2$ tem $(3+1) \times (2+1) = 4 \times 3 = 12$ divisores que são 1, 2, 2^2, 2^3, 3^2, 3^3, 2×3, $2^2 \times 3$, $2^3 \times 3$, 2×3^2, $2^2 \times 3^2$ e $2^3 \times 3^2$. Assim, se um número possui um número primo de divisores então ele só pode possuir um único fator primo. Logo a única possibilidade é que n seja da forma p^6, com p primo, e m é igual à soma das potências de p com expoentes 0 até 5 . Para que m seja mínimo, p terá que ser mínimo, logo $p = 2$ e $m = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^5 = 63$.

4. Observe que se uma pessoa responde "sim", então esta pessoa e a da direita não são da mesma tribo, mas se responder "não", então ela e a pessoa à sua direita são da mesma tribo. Assim, se 48 pessoas responderam "sim", então ao percorrer o círculo no sentido horário, observaremos 48 trocas de cor da tribo. Para que haja 48 trocas, devem haver pelo menos 24 pessoas da tribo azul e 24 da tribo vermelha dispostas alternadamente. Como queremos o máximo de pessoas da tribo vermelha, então podemos colocar as $100 - 24 - 24 = 52$ pessoas restantes juntas num mesmo bloco vermelho, como indicado a seguir:

$$\underbrace{VAVA...VAVA}_{24VA's}\underbrace{VV...VV}_{52V's}$$

Logo há no máximo $100 - 24 = 76$ pessoas da tribo vermelha.

5. Se em cada face estiver escrita a soma dos números dos vértices correspondentes a face, então a soma dos números em duas faces opostas é igual a soma dos números de todos os vértices do cubo. Logo se 8 e x é um par de faces opostas, então outro par de faces opostas é 10 e 13 e o terceiro par é 11 e 12, para que $10+13 = 11+12 =$ soma dos números em todos os vértices. Portanto $8+x = 23$, então $x = 15$.

6. (a) Para calcular os termos, basta considerar os dígitos das unidades na soma e no resultado. Assim, como os dígitos das unidades de 1^2, 2^2, ..., 10^2 são 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1 e 0, então começando por 1, temos: 1, $1 + 4 = \underline{5}$, $5 + 9 = 1\underline{4}$, $4 + 6 = 1\underline{0}$, $0 + 5 = \underline{5}$, $5 + 6 = 1\underline{1}$, $1 + 9 = \underline{0}$, $0 + 4 = \underline{4}$, $4 + 1 = \underline{5}$ e $5 + 0 = \underline{5}$, logo os 10 primeiros termos da seqüência são 1, 5, 4, 0, 5, 1, 0, 4, 5 e 5.
   (b) Observe que a partir do 11º termo, vamos começar a somar novamente os dígitos 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1 e 0, já que os dígitos das unidades de 11^2, 12^2, ..., 20^2, são os mesmos dígitos das unidades de 1^2, 2^2, ..., 10^2. Assim, na soma $1^2 + 2^2 + ... + 2010^2$, faremos as somas dos dígitos das unidades de 1^2 a 10^2, $\dfrac{2010}{10} = 201$ vezes e adicionaremos 1 de 2011^2.
   Assim, o algarismo das unidades da soma $1^2 + 2^2 + ... + 2011^2$ é o mesmo algarismo das unidades de $201 \times (1 + 4 + 9 + 6 + 5 + 6 + 9 + 4 + 1 + 0) + 1 = 201 \times 45 + 1 = 9046$, que é 6.