Gabarito 6 – 2 ª fase de 2012
Nível 1

1. São teimosos apenas os números que terminam em 0,1, 5 e 6. A quantidade de números teimosos de 3 algarismos é $9 \cdot 10 \cdot 4 = 360$ (na casa das centenas podemos escrever qualquer algarismo de 1 a 9, na casa das dezenas podemos escrever qualquer algarismo de 0 a 9 e na casa das unidades podemos escrever um dos quatro algarismos acima).

2. Os triângulos ABE e EHF são retângulos em A e H, respectivamente; a medida do ângulo BEF é de 90º; se a medida do ângulo HEF é x, então a medida dos ângulos EFH e AEB é $90^o - x$ e, conseqüentemente, a medida do ângulo ABE é x; como $BE = EF$ (são lados do mesmo quadrado), então os triângulos mencionados são congruentes (pelo caso ALA de congruência de triângulos). Como o quadrado ABCD tem área igual a $64cm^2$, concluímos que seus lados medem $\sqrt{64} = 8cm$; o quadrado FHIJ tem área igual a $36cm^2$, logo seus lados medem $6cm$. Portanto, $BA = EH = 8cm$ e $FH = AE = 6cm$. A área do trapézio ABFH é igual a $\dfrac{AB + FH}{2} \cdot AH = \dfrac{8+6}{2} \cdot 14 = 98cm^2$. Como o trapézio é composto pelos triângulos ABE, EHF e BEF e a área dos triângulos congruentes ABE e EHF é $\dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24cm^2$, concluímos que a área do triângulo BEF é $98 - 2 \cdot 24 = 50cm^2$ e, conseqüentemente, a área do quadrado $ABFH$ é o dobro, ou seja, $100cm^2$.

3. As horas possíveis são 00, 02, 04, 06, 08, 20 e 22, totalizando 7 possibilidades. Para cada uma dessas horas, os minutos podem ser 00, 02, 04, 06, 08,..., 40, 42,..., 48, etc, num total de $3 \times 5 = 15$ possibilidades. Portanto, o número de vezes em que o relógio exibe apenas algarismos pares é $7 \times 15 = 105$.

4. O número de horas por dia vezes o número de dias por semana vezes o número de semana por mês vezes o número de meses por ano é igual a $4096 = 2^{12}$ horas. Como aqueles números são todos iguais a um mesmo número, então este número multiplicado por sí mesmo quatro vezes, ou seja, elevado à quarta potência, é igual a $2^{12} = (2^3)^4$. Logo este número é $2^3 = 8$, e portanto há 8 semanas em um mês no planeta POT.

5. Todas as faces azuis: uma maneira. Cinco faces azuis e uma amarela: uma maneira. Quatro faces azuis e duas amarelas: duas maneiras (duas faces amarelas opostas ou duas faces amarelas adjacentes). Três faces azuis e três faces amarelas: duas maneiras (três azuis com um vértice comum - uma maneira ou três azuis com uma aresta comum duas a duas - uma maneira) Duas faces azuis e quatro amarelas: duas maneiras Uma face azul e cinco amarelas: uma maneira. Todas as faces amarelas: uma maneira. Portanto, o número de maneiras diferentes de pintar o cubo é 10.

6. O tanque contém uma mistura de 30 litros, sendo $0,2 \times 30 = 6$ litros de álcool e $30 - 6 = 24$ litros de gasolina. Portanto, para que as quantidades de gasolina e álcool fiquem iguais, devem ser colocados no tanque $24 - 6 = 18$ litros de álcool.

7. Note que, como $CE = CD$, temos que o triângulo $\triangle CED$ é isósceles e ainda que o ângulo $C\hat{E}D = C\hat{D}E$. Portanto, $C\hat{E}D + C\hat{D}E + E\hat{C}D = 180^o \Rightarrow C\hat{E}D + C\hat{D}E = 180^o - 20^o \Rightarrow C\hat{E}D + C\hat{D}E = 160^o \Rightarrow C\hat{E}D = C\hat{D}E = 80^o$. Agora, note que os ângulos $C\hat{E}D$ e $B\hat{E}A$ são opostos pelo vértice. Logo, $C\hat{E}D = B\hat{E}A$. Mas ainda, o triângulo $\triangle ABE$ é isósceles, pois $AE = BE$. Portanto, o ângulo α é igual ao ângulo $B\hat{A}E$. Ainda temos: $\alpha + B\hat{A}E + B\hat{E}A = 180^o \Rightarrow \alpha + B\hat{A}E + 80^o = 180^o \Rightarrow \alpha + B\hat{A}E = 100^o \Rightarrow \alpha = B\hat{A}E = 50^o$. Os ângulos $B\hat{E}A$ e $B\hat{E}C$ são suplementares, logo $B\hat{E}C = 180^o - 80^o \Rightarrow B\hat{E}C = 100^o$. Ainda, o triângulo $\triangle BEC$ é isósceles, pois $BE = CE$, e $\beta = C\hat{B}E$. Então, $\beta + B\hat{E}C + C\hat{B}E = 180^o \Rightarrow \beta + 100^o + C\hat{B}E = 180^o \Rightarrow \beta = C\hat{B}E = 40^o$. Logo, a razão $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{50}{40} = \dfrac{5}{4}$.