

**Lista de Problemas: Desigualdades**

Prof. Eliézer Batista

e-mail: ebatista@mtm.ufsc.br

1) Sejam  $a, b$  dois números reais tais que  $a + b > 0$ . Mostre que

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} \geq \frac{a + b}{2}.$$

2) Sejam  $a, b, c \geq 0$ , mostre que

- a)  $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$ .
- b)  $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$ .
- c)  $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ .
- d)  $\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ .

3) Sejam  $a, b, c > 0$ . Mostre que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

4) Sejam  $x_1, x_2$  e  $x_3$  três números reais tais que  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$ , e considere os números  $a_{ij} \leq M$  com  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Mostre que

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{33}x_3^2 \leq 3M.$$

5) Sejam  $a, b, c$  números reais tais que  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Mostre que

$$-\frac{1}{2} \leq ab + ac + bc \leq 1.$$

6) Sejam  $a_1, a_2, \dots, a_n$  números reais positivos tais que  $a_1a_2 \dots a_n = 1$ . Mostre que

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

7) Sejam  $a, b, c$  lados de um triângulo. Mostre que

$$ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + ac + bc).$$