UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
VIII Encontro de Professores da ORM
PET – MATEMÁTICA

Lista de Problemas

Profª Carmem Suzane Comitre Gimenez
e-mail: carmemsuzane@gmail.com

1. Encontre o algarismo das unidades dos números 3^{2013} e 7^{2013}.

   1a. Quais são as possibilidades para o algarismo das unidades de um quadrado perfeito?
   1b. Quais são as possibilidades para o algarismo das unidades do número $x^4 + 7^{2013}$?
   1c. Se a quinta potência de um número inteiro x é 916132832, qual é o algarismo das unidades de x?

2. Quantas soluções tem a equação $x + y + z = n$ para x, y, z números inteiros positivos e n fixo?

3. Devemos colocar 500 bolas formando um triângulo, com uma bola na primeira linha, duas bolas na segunda linha, três na terceira linha, etc. Pergunta-se: quantas linhas haverá? Quantas bolas sobrarão? Quantas bolas serão necessárias para fazer 50 linhas? Generalize.

4. Empilhe bolas em formato de pirâmide de base triangular (triângulo equilátero); por exemplo: se a base é um triângulo com 6 bolas, a segunda "camada" tem 3 bolas e a terceira tem uma bola, completando a pirâmide. A quantidade de bolas representa um “número tetraédrico”.
   Encontre uma fórmula para os números tetraédricos e determine os primeiros doze.

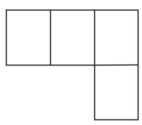
5. Observe as igualdades:

$$2^2 - 1^2 = 3$$
$$3^2 - 2^2 = 5$$
$$4^2 - 3^2 = 7$$

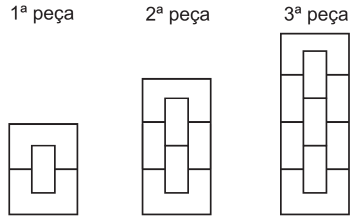
   Explique porque a diferença entre os quadrados de dois números consecutivos é um número ímpar.

6. Um jogo de dominó que vai até o duplo 6 tem 28 peças; se o jogo for até o duplo 9, tem 55 peças. Quantas peças possui um jogo de dominó que vai até o duplo 12?
   Você pode generalizar?

7. Temos 1999 peças no formato da figura abaixo e desejamos fazer o maior quadrado possível, sem buracos ou superposições. Quantas peças sobram?



8. Com dois tipos de blocos, um no formato de um U, e outro retangular, construímos ordenadamente 1000 peças. As três primeiras são mostradas a seguir:



Calcular o número de retângulos utilizados na milésima peça.

9. Encontre a expressão do termo geral das sequências:

a) $(1, 0, 3, 10, 21, \ldots)$ b) $(1, 3, 19, 61, 141, \ldots)$ c) $(3, 4, 6, \ldots)$

d) $(5, 50, 375, 2500, \ldots)$ e) $\left(2, -\frac{5}{2}, 3, -\frac{7}{2}, 4, \ldots\right)$

10. O menor ângulo interno de um polígono convexo mede $139°$. Encontre o número de lados deste polígono sabendo que as medidas de seus ângulos internos formam um P.A. cuja razão é $2°$.

11. Dividem-se os números naturais em grupos do seguinte modo:
$(1)(2, 3)(4, 5, 6)(7, 8, 9, 10)(11, 12, 13, 14, 15)(16, 17, 18, 19, 20, 21) \ldots$
Os grupos que contém um número par de naturais são apagados. Prove que a soma dos elementos dos k primeiros grupos restantes é k^4.

12. Sejam $R = 3 \times 9 + 4 \times 10 + 5 \times 11 + 6 \times 12 + 7 \times 13 + \ldots + 2003 \times 2009$ e
$S = 1 \times 11 + 2 \times 12 + 3 \times 13 + 4 \times 14 + 5 \times 15 + \ldots + 2001 \times 2011$.
Qual número é maior: R ou S?

13. Sejam $a = 1111 \ldots 1$ (n algarismos iguais a 1) e $b = 1000 \ldots 05$ ($n - 1$ algarismos iguais a 0). Prove que $a \times b + 1$ é um quadrado perfeito e determine a sua raiz quadrada.

14. Mostre que o número $N = 4444 \ldots 4888 \ldots 9$ constituído de n algarismos 4, $n-1$ algarismos 8 e um algarismo 9, é um quadrado perfeito. Determine sua raiz quadrada.

Problemas Propostos:

15. No triângulo

$$\begin{array}{llll} 1 & & & \\ 3 & 5 & & \\ 7 & 9 & 11 & \\ 13 & 15 & 17 & 19 \end{array}$$

Determinar:
a) O primeiro elemento da 31° linha.
b) A soma dos elementos da 31° linha.

16. Todo termo de uma sequência, a partir do segundo, é igual a soma do anterior com a soma de seus algarismos. Os primeiros elementos da sequência são: $1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, 38, 49, 62, \ldots$.
É possível que 793210041 pertença a essa sequência?

17. Mostre que se a, b, c estão em P.H., então $\dfrac{1}{b-a} = \dfrac{1}{b-c} = \dfrac{2}{b}$.

18. Mostre que se a^2, b^2, c^2 estão em P.A., então $b + c$, $c + a$, $a + b$ estão em P.H.