Indução

Alda Dayana Mattos Mortari

X Encontro da Olimpíada Regional de Matemática

Florianópolis, 28 de Março de 2015.

Demonstrando igualdades

Seja n um número natural qualquer maior do que 1. Qual será o valor da soma de todos os n primeiros números ímpares, ou seja, de $S(n) = 1 + 3 + \ldots + (2n - 1)$?
Vejamos alguns casos:

- $n = 1$: $S(1) = 1$;
- $n = 2$: $S(2) = 1 + 3 = 4 = 2^2$;
- $n = 3$: $S(3) = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$;
- $n = 4$: $S(3) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$;
- $\ldots$

Conjectura: Parece que para todo número natural n, temos que $S(n) = n^2$. Mas como provar isso?

Outro exemplo:

Seja n um número natural qualquer e considere $x = n^2 + n + 41$.

- $n = 0 \Rightarrow x = 41$;
- $n = 1 \Rightarrow x = 43$;
- $n = 2 \Rightarrow x = 47$;
- $n = 3 \Rightarrow x = 53$;
- $n = 4 \Rightarrow x = 61$;
- $n = 5 \Rightarrow x = 71$;
- $n = 6 \Rightarrow x = 83$;
- $n = 7 \Rightarrow x = 97$;
- $n = 8 \Rightarrow x = 113$;
- $n = 9 \Rightarrow x = 131$;
- $\ldots$

Outro exemplo:

Seja n um número natural qualquer e considere $x = n^2 + n + 41$.

- $n = 0 \Rightarrow x = 41$;
- $n = 1 \Rightarrow x = 43$;
- $n = 2 \Rightarrow x = 47$;
- $n = 3 \Rightarrow x = 53$;
- $n = 4 \Rightarrow x = 61$;
- $n = 5 \Rightarrow x = 71$;
- $n = 6 \Rightarrow x = 83$;
- $n = 7 \Rightarrow x = 97$;
- $n = 8 \Rightarrow x = 113$;
- $n = 9 \Rightarrow x = 131$;
- $\ldots$

Conjectura: Parece que para todo número natural n, $x = n^2 + n + 41$ é um número primo!

Outro exemplo:

Seja n um número natural qualquer e considere $x = n^2 + n + 41$.

- $n = 0 \Rightarrow x = 41$;
- $n = 1 \Rightarrow x = 43$;
- $n = 2 \Rightarrow x = 47$;
- $n = 3 \Rightarrow x = 53$;
- $n = 4 \Rightarrow x = 61$;
- $n = 5 \Rightarrow x = 71$;
- $n = 6 \Rightarrow x = 83$;
- $n = 7 \Rightarrow x = 97$;
- $n = 8 \Rightarrow x = 113$;
- $n = 9 \Rightarrow x = 131$;
- $\ldots$

Conjectura: Parece que para todo número natural n, $x = n^2 + n + 41$ é um número primo!
Falso, pois para $n = 40$ temos $40^2 + 40 + 41 = 41 \times 41$ que é um número composto!

Pergunta:

Como garantir que uma proposição geral é verdadeira para qualquer número natural n, se não podemos experimentar todos os valores possíveis de n?

Pergunta:

Como garantir que uma proposição geral é verdadeira para qualquer número natural n, se não podemos experimentar todos os valores possíveis de n?

Resposta:

Às vezes (**nem sempre**) podemos garantir a validade da afirmação usando um "princípio de indução".

Axiomas de Peano (1858-1932)

Geometria

300 a.C. - Nos *Elementos*, de Euclides, a Geometria já recebia um tratamento lógico-dedutivo, com seus postulados e axiomas.

Aritmética

Aritmética

- 1260 - Nossa primeira tentativa registrada de axiomatizar o conjunto dos números naturais. Giovanni Campano, capelão do Papa Urbano IV, procurou fundamentar os números naturais em quatro postulados.

Aritmética

- 1260 - Nossa primeira tentativa registrada de axiomatizar o conjunto dos números naturais. Giovanni Campano, capelão do Papa Urbano IV, procurou fundamentar os números naturais em quatro postulados.
- Gottfried W. Leibniz (1646-1716) - assinalou que "verdades" tão evidentes como $2 + 2 = 4$ devem ser objeto de demonstração a partir do conceito de número, o mesmo devendo acontecer também com propriedade aparentemente tão óbvias como a comutatividade da adição e da multiplicação.

Aritmética

- 1260 - Nossa primeira tentativa registrada de axiomatizar o conjunto dos números naturais. Giovanni Campano, capelão do Papa Urbano IV, procurou fundamentar os números naturais em quatro postulados.
- Gottfried W. Leibniz (1646-1716) - assinalou que "verdades" tão evidentes como $2 + 2 = 4$ devem ser objeto de demonstração a partir do conceito de número, o mesmo devendo acontecer também com propriedade aparentemente tão óbvias como a comutatividade da adição e da multiplicação.
- Até o século XIX os fundamentos da Matemática se apoiaram quase que inteiramente apenas na intuição!

Aritmética

- 1260 - Nossa primeira tentativa registrada de axiomatizar o conjunto dos números naturais. Giovanni Campano, capelão do Papa Urbano IV, procurou fundamentar os números naturais em quatro postulados.
- Gottfried W. Leibniz (1646-1716) - assinalou que "verdades" tão evidentes como $2 + 2 = 4$ devem ser objeto de demonstração a partir do conceito de número, o mesmo devendo acontecer também com propriedade aparentemente tão óbvias como a comutatividade da adição e da multiplicação.
- Até o século XIX os fundamentos da Matemática se apoiaram quase que inteiramente apenas na intuição!
- 1888 - O primeiro sistema completo de axiomas para a Aritmética foi apresentado por Richard Dedekind.

Método axiomático

- *Conceitos primitivos:* são termos da teoria sem uma explicação formal de seu significado;
- *Axiomas:* proposições que se tomam como verdadeiras independentes de qualquer demonstração que caracterizam os conceitos primitivos;
- *Demais resultados:* são demonstrados a a partir dos axiomas por raciocínios lógicos corretos.

Conceitos primitivos:

- Zero;
- Número natural;
- Relação é *sucessor de*.

Axiomas de Peano

(P1) Zero é um número natural.
(P2) Se n é um número natural, então n tem um único sucessor que também é um número natural.
(P3) Zero não é sucessor de nenhum número natural.
(P4) Dois números naturais que têm sucessores iguais são, eles próprios, iguais.
(P5 - Axioma da indução completa) Se uma coleção S de números naturais contém o zero e, também, o sucessor de todo elemento de S, então S é o conjunto de todos os números naturais.

Primeiro princípio de indução:

Sejam $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n e n_0 um número natural. Suponhamos que:

(i) $P(n_0)$ *é válida;*

(ii) *para todo número natural $n \geq n_0$, a validez de $P(n)$ implica na validez de $P(n+1)$.*

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geq n_0$.

Exemplo

Mostre que para todo número natural $n \geq 1$, *temos que* $S(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Exemplo

Mostre que para todo número natural $n \geq 1$*, temos que* $S(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Exemplo

Mostre que para todo número natural $n \geq 1$*, temos que* $4^n + 6n - 1$ *é divisível por* 9.

Exemplo

Mostre que para todo número natural $n \geq 1$, *temos que* $S(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Exemplo

Mostre que para todo número natural $n \geq 1$, *temos que* $4^n + 6n - 1$ *é divisível por* 9.

Exemplo

Mostre que para todo número natural $n \geq 5$, *temos que* $2^n > n^2$.

O enigma do cavalo de Alexandre

O cavalo de Napoleão era branco, enquanto o de Alexandre tinha cor de bronze. No entanto, vamos "provar" que todos os cavalos possuem a mesma cor!

Demonstração: Considere a sentença:

$P(n)$: Num conjunto com n cavalos, todos possuem a mesma cor.

$P(1)$ é obviamente verdadeira.
Agora, suponha que o resultado seja válido para um conjunto com k cavalos, onde k é qualquer número natural maior ou igual a 1 e considere o conjunto

$$\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_k, C_{k+1}\},$$

com $k+1$ cavalos.
Pela hipótese de indução, os cavalos no conjunto $\{C_1, \ldots, C_k\}$ possuem todos a mesma cor. Analogamente, os cavalos no conjunto $\{C_2, \ldots, C_{k+1}\}$ possuem todos a mesma cor.
Como as coleções $\{C_1, \ldots, C_k\}$ e $\{C_2, \ldots, C_{k+1}\}$ possuem cavalos em comum, concluímos que todos os cavalos em $\mathcal{C}$ possuem a mesma cor.
Logo, pelo primeiro princípio de indução, em um conjunto com n cavalos, todos possuem a mesma cor, onde n é qualquer número natural. (!?!)

Segundo princípio de indução:

Sejam $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n e n_0 um número natural. Suponhamos que:

i) $P(n_0)$ *é válida;*

ii) *para todo número natural $n \geq n_0$, a validez de $P(k)$ para todo $n_0 \leq k \leq n$ implica na validez de $P(n+1)$.*

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geq n_0$.

Exemplo

Seja x *um número real não nulo, tal que* $x + \dfrac{1}{x}$ *é um número inteiro. Mostre que para todo número natural* n *maior ou igual a* 1, $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ *também é um número inteiro.*

Teorema Fundamental da Aritmética

Para todo número natural n maior do que 1 existem números primos $p_1, p_2, \ldots, p_r$, onde r é um número natural maior ou igual do que 1, de modo que

$$n = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_r.$$

Além disso, esta decomposição é única a menos da ordem dos fatores.

Principais referências

- . H. Domingues, *Fundamentos de Aritmética*, Editora da UFSC, 2009.
- . S. C. Gimenez, N. T. B. Carvalho, *Fundamentos de Matemática I*, Editora da UFSC, 2009.
- . Lopes, *Manual de Indução Matemática*, Editora Interciência, 1999.
- . C. P. Carvalho, A. C. de O. Morgado, *Matemática Discreta*, SBM, 2013.