Universidade Federal de Santa Catarina
XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina

X Encontro da Olimpíada Regional de Matématica
Gabarito lista de exercícios - Divisibilidade e Primos

---

1. (ORM 2014, Nível 2) Note que
$$2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$$
($2014 = 2 \cdot 1007$ e devemos testar todos os fatores primos até $31 < \sqrt{1007} < 32$. Fazendo estes testes, encontramos 19 como fator primo de 1007).

   Então, se $a^2 - b^2 = 2014$, teremos
$$(a-b)(a+b) = 2 \cdot 19 \cdot 53$$
e, portanto, $(a-b)$ e $(a+b)$ são divisores de 2014.

   Qualquer que seja a possibilidade para $(a-b)$ e $(a+b)$, o fator 2 estará em um deles. Portanto, ou $(a-b)$ será par e $(a+b)$ será ímpar, ou $(a-b)$ será ímpar e $(a+b)$ será par. Mas então
$$(a-b) + (a+b) = 2 \cdot a$$
será ímpar. Absurdo.

2. (ORM 2011, Nível 1) Se os três números fossem ímpares (ou seja, distintos de 2), então a soma de dois deles seria par, e o produto final seria par e portanto diferente de 125. Portanto, um dos números (o menor deles) primos é 2.

   Como o produto do segundo pela soma dos outros dois é $125 = 5^3$, então o segundo deles só pode ser 5. Então os outros dois somam 25 e, então, o maior deles é 23.

   Portanto, os três primos pedidos são 2, 5 e 23.

3. (ORM 2011, Nível 2) Observe que, de $abc + bcd = (a+d)bc = 825$, temos que os três fatores $(a+d)$, b e c devem ser ímpares. Mas como a soma de dois primos ímpares é par, então $a = 2$ (para que $a + d$ seja ímpar).

   Agora observe que a decomposição em fatores primos de 825 é:
$$825 = 3 \cdot 5^2 \cdot 11.$$
Então só há duas possibilidades para que o produto $(a+d)bc$ seja igual a 825. Uma delas é $a + d = 25$, e nesse caso $d = 23$, $b = 3$ e $c = 11$. Mas então teremos $ab + bc + cd = 6 + 33 + 253 > 208$. A outra possibilidade é que b ou c sejam iguais a 5. Se $c = 5$ então $b = 3$ e $a + d = 55$, ou seja, $d = 53$. Nesse caso também teríamos $ab + bc + cd > 208$. Então $b = 5$.

   Ficamos então com o seguinte sistema para determinar c e d:
$$\begin{cases} 10 + 5c + cd = 208 & (1) \\ 10c + 5cd = 825 & (2) \end{cases}$$
A equação (1) nos dá: $cd = 198 - 5c$ e, substituindo na equação (2) obtemos: $10c + 5(198 - 5c) = 825$, o que nos dá $c = 11$. Voltando à equação (1) temos: $10 + 55 + 11d = 208$, o que nos dá $d = 13$. Note que, na equação original, teremos: $ab + bc + cd = (2 \cdot 5) + (5 \cdot 11) + (11 \cdot 13) = 10 + 55 + 143 = 208$.

   Portanto, os quatro primos são: $a = 2$, $b = 5$, $c = 11$, e $d = 13$.

4. (ORM 2010, Nível 1) Observe que
$$2010 = 67 \times 30.$$
Portanto há 30 múltiplos de 67 entre 1 e 2010, e o fator 67 aparecerá pelo menos 30 vezes no produto de 1 a 2010. Agora, como
$$67^2 = 4489 > 2010,$$
então não há números que são potências de 67, com expoente maior do que um, nos números de 1 a 2010. Portanto, o expoente de 67 no produto de 1 a 2010 é igual a 30.

5. (ORM 2009, Nível 1)Para ser divisível por 45, um número deve ser divisível por 5 e por 9. Todos os números divisíveis por 5 terminam em 5 ou em 0. Se o quadrado de um primo menos 1 terminar em 5, então esse quadrado termina em 6 e não seria o quadrado de um primo porque seria o quadrado de um número par e o único número primo par é o número 2.

   Logo, o quadrado do primo menos 1 termina em 0, e então o quadrado do primo deve terminar em 1. Os números cujos quadrados terminam em 1 são aqueles que terminam em 1 ou em 9.

   Então, consideremos os seguintes números primos de dois algarismos:
   $11 \longrightarrow 11^2 = 121 \longrightarrow 121 - 1 = 120$. 120 não é múltiplo de 9.
   $19 \longrightarrow 19^2 = 361 \longrightarrow 361 - 1 = 360$. 360 é múltiplo de 9.
   $29 \longrightarrow 29^2 = 841 \longrightarrow 841 - 1 = 840$. 840 não é múltiplo de 9.
   $31 \longrightarrow 31^2 = 961 \longrightarrow 961 - 1 = 960$. 960 não é múltiplo de 9.
   $41 \longrightarrow 41^2 = 1681 \longrightarrow 1681 - 1 = 1680$. 1680 não é múltiplo de 9.
   $59 \longrightarrow 59^2 = 3481 \longrightarrow 3481 - 1 = 3480$. 3480 não é múltiplo de 9.
   $61 \longrightarrow 61^2 = 3721 \longrightarrow 3721 - 1 = 3720$. 3720 não é múltiplo de 9.
   $71 \longrightarrow 71^2 = 5041 \longrightarrow 5041 - 1 = 5040$. 5040 é múltiplo de 9.
   $79 \longrightarrow 79^2 = 6241 \longrightarrow 6241 - 1 = 6240$. 6240 não é múltiplo de 9.
   $89 \longrightarrow 89^2 = 7921 \longrightarrow 7921 - 1 = 7920$. 7920 é múltiplo de 9.

   Portanto, os números primos de dois algarismos cujo quadrado diminuindo 1 é divisível por 45 são 19, 71 e 89.