Universidade Federal de Santa Catarina
XVIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina

X Encontro da Olimpíada Regional de Matemática
Gabarito lista de exercícios - Indução

1. Vamos mostrar por indução.

   Passo 1: $n = 1$.

   Observe que
$$\frac{1 \cdot (2 \cdot 1 + 1) \cdot (1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1 = 1^2.$$

   Passo 2: Nossa hipótese de indução é que a igualdade fornecida é válida para um número natural k maior ou igual a 1, ou seja,
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(2k+1)(k+1)}{6}.$$

   Temos que mostrar que
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$
   é válida para $n = k + 1$.

   Note que
$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(2k+1)(k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(2k+1)(k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)((2k+3)(k+2))}{6} \\ &= \frac{(k+1)((2(k+1)+1) + ((k+1)+1))}{6}. \end{aligned}$$

   Portanto, o resultado segue por indução.

2. Vamos mostrar por indução.

   Passo 1: $n = 1$.

   Observe que
$$8^1 - 3^1 = 8 - 3 = 5.$$

   Passo 2: Nossa hipótese de indução é que para um número natural k maior ou igual a 1, 5 é um divisor de $8^k - 3^k$, ou seja, existe um número inteiro x, tal que
$$8^k - 3^k = 5x.$$

   Temos que mostrar que 5 é um divisor de $8^n - 3^n$ para $n = k + 1$.

   Note que
$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 3^{k+1} &= 8^k \cdot 8 - 3^k \cdot 3 = 8^k \cdot 8 - 3^k \cdot 8 + 3^k \cdot 5 \\ &= (8^k - 3^k) \cdot 8 + 3^k \cdot 5 = 5x \cdot 8 + 3^k \cdot 5 = 5(8x + 3^k). \end{aligned}$$

   Deste modo, segue que 5 é um divisor de $8^n - 3^n$ para $n = k + 1$.

   Portanto, o resultado segue por indução.

3. Vamos mostrar por indução.

   Passo 1: $n = 1$.

   Observe que
$$3 \cdot 5^{2\cdot 1+1} + 2^{3\cdot 1+1} = 3 \cdot 5^3 + 2^4 = 3 \cdot 125 + 16 = 391 = 17 \cdot 23.$$

   Passo 2: Nossa hipótese de indução é que para um número natural k maior ou igual a 1, 17 é um divisor de $3 \cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+1}$, ou seja, existe um número inteiro x, tal que
$$3 \cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+1} = 17x.$$

   Temos que mostrar que 17 é um divisor de $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ para $n = k + 1$.

   Note que
$$\begin{aligned} 3 \cdot 5^{2(k+1)+1} + 2^{3(k+1)+1} &= 3 \cdot 5^{(2k+1)+2} + 2^{(3k+1)+3} = 3 \cdot 5^{2(k+1)} \cdot 5^2 + 2^{3(k+1)} \cdot 2^3 \\ &= 3 \cdot 5^{2(k+1)} \cdot 5^2 + 2^{3(k+1)} \cdot 5^2 - 2^{3(k+1)} \cdot 17 = (3 \cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+1}) \cdot 5^2 - 2^{3(k+1)} \cdot 17 \\ &= 17x \cdot 5^2 - 2^{3(k+1)} \cdot 17 = 17(25x - 2^{3(k+1)}). \end{aligned}$$

   Deste modo, segue que 17 é um divisor de $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ para $n = k + 1$.

   Portanto, o resultado segue por indução.

4. Vamos mostrar por indução.

   Passo 1: $n = 3$.

   Observe que
$$(3 + 1)^3 = 4^3 = 64 < 3^4 = 81.$$

   Passo 2: Nossa hipótese de indução é que para um número natural k maior ou igual a 3, $(k+1)^k < k^{k+1}$.

   Temos que mostrar que $(n + 1)^n < n^{n+1}$ para $n = k + 1$.

   Vamos começar observando que
$$((k + 1) + 1)^{k+1} < (k + 1)^{(k+1)+1} \Leftrightarrow (k + 2)^{k+1} < (k + 1)^{k+2} = (k + 1)^{k+1} \cdot (k + 1).$$

   Agora, como k é um número natural positivo,
$$(k + 2)^{k+1} < (k + 1)^{k+1} \cdot (k + 1) \Leftrightarrow \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} < k + 1.$$

   Sendo assim, se de alguma forma conseguirmos concluir que
$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} < k + 1$$

   seguirá o desejado.

   Agora usando a hipótese de indução e o fato de que k e $\dfrac{k+1}{k}$ são números positivos, obtemos que
$$(k + 1)^k < k^{k+1} \Rightarrow \left(\frac{k+1}{k}\right)^k < k \Rightarrow \frac{k+1}{k} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^k < \frac{k+1}{k} \cdot k = k + 1.$$

   Então,
$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1} < k + 1.$$

   Se mostrarmos que $\dfrac{k+2}{k+1} < \dfrac{k+1}{k}$ teremos concluído o desejado, pois
$$\frac{k+2}{k+1} < \frac{k+1}{k} \Rightarrow \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} < \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}.$$

   Mas,
$$k^2 + 2k < k^2 + 2k + 1 \Rightarrow k(k + 2) < (k + 1)^2 \Rightarrow k(k + 2) < (k + 1)(k + 1) \Rightarrow \frac{k+2}{k+1} < \frac{k+1}{k}.$$

   Portanto, o resultado segue por indução.

5. Vamos mostrar por indução.

Passo 1: $n = 3$.

Observe que

$$(3!)^2 = 6^2 = 36 > 27 = 3^3.$$

Passo 2: Nossa hipótese de indução é que para um número natural k maior ou igual a 3, $(k!)^2 > k^k$.

Temos que mostrar que $(n!)^2 > n^n$ para $n = k + 1$.

Vamos começar observando que

$$((k+1)!)^2 = ((k+1)k!)^2 = (k+1)^2(k!)^2.$$

Por hipótese de indução $(k!)^2 > k^k$, logo

$$((k+1)!)^2 = (k+1)^2(k!)^2 > (k+1)^2 \cdot k^k. \quad \text{(I)}$$

Agora sabemos do exercício anterior que para um número natural k maior ou igual a 3, $k^{k+1} > (k+1)^k$. Assim, sabendo que $k^{k+1} = k \cdot k^k$ e que $k + 1 > k$, obtemos que

$$k \cdot k^k > (k+1)^k \Rightarrow (k+1)k^k > k \cdot k^k > (k+1)^k \Rightarrow (k+1)k^k > (k+1)^k \Rightarrow (k+1)^2 \cdot k^k > (k+1)^{k+1}. \quad \text{(II)}$$

Então, de (I) e (II) segue que

$$((k+1)!)^2 > (k+1)^2 \cdot k^k > (k+1)^{k+1},$$

como desejado.

Portanto, o resultado segue por indução.